

Krzysztof TWARDOCH<sup>1</sup>

## CYFROWE MODELOWANIE GEOMETRYCZNE ZARYSU ZĘBÓW Z ZASTOSOWANIEM METODOLOGII CAD

**Streszczenie.** Niniejszy artykuł poświęcony jest problematyce poprawnego definiowania modelu przestrzennego zarysu zęba z zastosowaniem metodologii CAD. Poruszony został problem dokładności odwzorowania definiowanych krzywych opisujących geometrię zębów. Szczególną uwagę poświęcono precyzyjnemu modelowaniu geometrii ewolwentowego zarysu zęba, które w sposób istotny wpływa na proces identyfikacji sztywności zazębienia przeprowadzany na potrzeby badań zjawisk dynamicznych zachodzących w przekładniach zębatych, prowadzonych za pomocą modeli dynamicznych.

**Słowa kluczowe:** przekładnia zębata, sztywność zazębienia, zarys zęba, kształt zęba, cyfrowe modelowanie geometryczne, CAD

## DIGITAL GEOMETRIC MODELLING OF TEETH PROFILE BY USING CAD METHODOLOGY

**Summary.** This article is devoted to the problem of properly defining the spatial model of tooth profile with CAD methodologies. Moved by the problem of the accuracy of the mapping defined curves describing the geometry of the teeth. Particular attention was paid to precise geometric modeling involute tooth profile, which has a significant influence on the process of identifying the mesh stiffness for tests performed on the dynamic phenomena occurring in the gear transmission systems conducted using dynamic models.

**Keywords:** gear transmission, mesh stiffness, tooth profile, tooth shape, digital geometric modeling, CAD

### 1. WPROWADZENIE

Projektowanie konstrukcji mechanicznych we współczesnej praktyce inżynierskiej, poza stosowaniem klasycznych metod wykreślnych i analitycznych, w głównej mierze opiera się na wspomaganiu komputerowym (CAD), czyli zastosowaniu różnego rodzaju sprzętu i oprogramowania komputerowego wspomagającego projektowanie techniczne. Znamienne dla CAD jest cyfrowe modelowanie geometryczne, mające na celu opracowanie zapisu konstrukcji wyrobu technicznego (jego dokumentacji konstrukcyjnej).

Definiowanie modelu przestrzennego elementu konstrukcji (powierzchniowego lub bryłowego) wiąże się ze zdefiniowaniem krzywych opisujących geometrię tego elementu.

---

<sup>1</sup> Faculty of Mining and Geology, The Silesian University of Technology, Gliwice, Poland,  
e-mail: krzysztof.twardoch@polsl.pl.

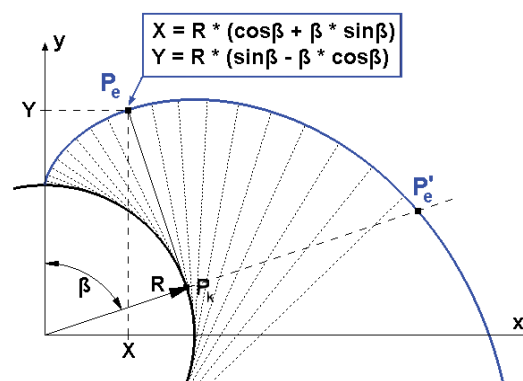
W modelowaniu *klasycznym* kształt krzywych zgodny z założeniami konstrukcyjnymi jest warunkiem poprawności całego projektu, gdyż to krzywe determinują kształt projektowanej bryły lub powierzchni elementu konstrukcyjnego. W tym aspekcie krzywe swobodne (krzywe Beziera, B-Spline lub NURBS) stosujemy, gdy znane są współrzędne kilku punktów (zmierzone lub obliczone). Natomiast, w przypadku gdy znane jest równanie krzywej, poszukujemy narzędzia, które umożliwi analityczną definicję krzywej. Problemu nie ma z typowymi krzywymi kanonicznymi (odcinek prostej, łuk okręgu, elipsa itd.) – w każdym systemie CAD znajdziemy polecenia typu Linia (Line), Okrąg (Circle) czy Elipsa (Ellipse). Problem pojawia się, gdy trzeba zdefiniować krzywą, która jest opisana dowolnym równaniem.

Niestety systemy CAD często nie mają tak rozbudowanych funkcji jak np. oprogramowanie MATLAB czy *Mathematica* i definicja krzywej, która jest wykresem dowolnej funkcji, nie jest priorytetem dostawców oprogramowania CAD. Jednak brak polecenia, które bezpośrednio tworzy (rysuje) krzywą według zadanego równania, nie jest równoznaczny z brakiem takich możliwości.

Systemy CAD umożliwiają zdefiniowanie modelu geometrycznego dowolnej krzywej, wspomagają konstrukcję krzywych na bazie zestawu punktów, których współrzędne wynikają z założeń konstrukcyjnych lub są wynikiem przeprowadzonych obliczeń – zazwyczaj poza środowiskiem CAD, niekiedy wykonanych w pamięci konstruktora, często jednak w dedykowanych programach (KISSsoft – kształt zarysu zęba). Przez kolejne punkty można poprowadzić na przykład krzywą typu Splajn, krzywą interpolacyjną wyrażaną za pomocą funkcji sklepanych, będących interpolacyjnymi wielomianami niskiego stopnia. W każdym przypadku kształt krzywej musi być zdefiniowany z zadaną dokładnością. Należy tu zwrócić uwagę na dokładność obliczeń i liczbę punktów albo raczej ich *gęstość*, bowiem to właśnie one decydują o dokładności odwzorowania krzywej.

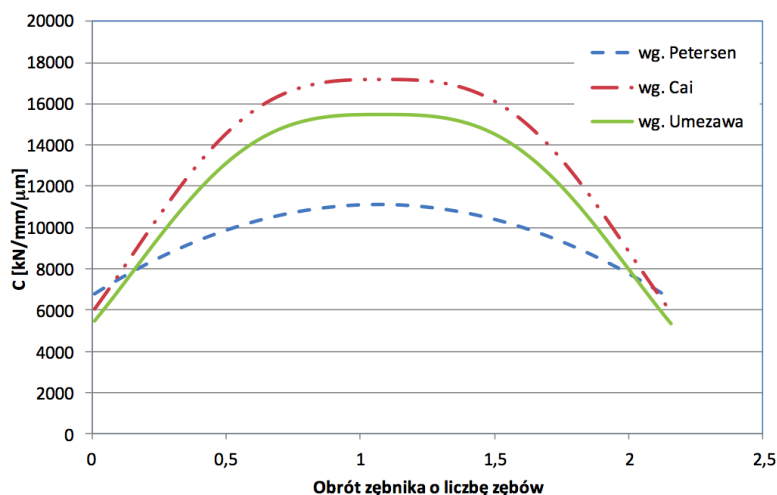
## 2. MODEL GEOMETRYCZNY ZARYSU EWOLWENTOWEGO ZĘBA W ASPEKCIE IDENTYFIKACJI SZTYWNOŚCI ZAZĘBIENIA

Często zadaniem konstruktora bądź badacza jest precyzyjna konstrukcja geometrii zarysu ewolwentowego zęba koła zębatego. Problemem wówczas staje się definicja takiej krzywej w systemie CAD. Dla przypomnienia, współrzędne dowolnego punktu ewolwenty są opisane układem równań przedstawionym na rys. 1. Promień koła zasadniczego  $R$  jest tu wielkością stałą, a kąt odwinięcia  $\beta$  jest zmienną, która umożliwia obliczenie współrzędnych dowolnego punktu krzywej ( $P_e$ ).



Rys. 1. Krzywa ewolwentowa  
Fig. 1. Involute curve

Precyzyjne zamodelowanie geometrii ewolwentowego zarysu zębów staje się szczególnie istotne w przypadku, gdy celem badacza jest wyznaczenie przebiegu sztywności zazębienia na potrzeby badań zjawisk dynamicznych zachodzących w przekładni zębatej, prowadzonych za pomocą modeli dynamicznych. Badaniom tym zazwyczaj towarzyszą pewne niedokładności, które mogą skutkować wystąpieniem istotnych rozbieżności pomiędzy przewidywanym (za pomocą symulacji) a faktycznym zachowaniem się obiektu rzeczywistego (zaobserwowanym w trakcie badań doświadczalnych). Rozbieżności te mogą mieć źródło między innymi w niewystarczającej dokładności identyfikacji wartości przebiegu sztywności zazębienia. Badacze proces ten przeprowadzają przeważnie na modelach uzębienia, a tym samym dokonują pewnych uproszczeń zarówno zarysu zębów, jak i ich obciążenia. W rezultacie przebiegi sztywności zazębienia pojedynczej pary zębów różnią się wartościami w zależności od przyjętego modelu. Dla przykładu, poniżej przedstawiono przebiegi sztywności zazębienia pojedynczej pary zębów (rys. 2) otrzymane przez autora artykułu [2], wyznaczone na podstawie modeli opublikowanych w pracach [1, 6, 10]. Łatwo zauważyć, że różnią się one istotnie wartościami zarówno na początku przyporu, jak i na końcu przyporu, a także w punkcie tocznym. Parametry geometryczne przekładni, dla której wyznaczono te przebiegi sztywności, zamieszczone zostały w artykule [2], gdzie autor poddał szerszym rozważaniom naukowym problematykę identyfikacji sztywności zazębienia.



Rys. 2. Sztywność zazębienia pojedynczej pary zębów [2] wg Petersena, Umezawa i Cai  
Fig. 2. The mesh stiffness of a single pair of teeth by Petersen, Umezawa and Cai

### 3. MODELOWANIE GEOMETRYCZNE ZARYSU ZĘBÓW W SYSTEMIE CAD

Biorąc pod uwagę powyższe przesłanki dotyczące precyzyjnego modelowania geometrii zarysu ewolwentowego zęba, autor w tym zakresie poddał szczegółowej analizie metodologię CAD. Okazało się, że większość programów CAD, jeżeli generuje zęby na kole zębatym, to przybliża zarys zęba łukiem lub splinem. Oczywiście są wyjątki, np. CATIA, zaawansowany system wspomagania prac inżynierskich, oferujący inteligentne metody definiowania ewolwenty za pomocą równań. Jednak istnieją pewne ograniczenia tych metod. Warto też wspomnieć o T-Flex CAD, który ma opcję tworzenia tzw. splajnu funkcyjnego. Jego parametry umożliwiają wybór kilkunastu różnych krzywych, w tym również Ewolwentę (inne to np. Parabola, Hiperbola, Strofoida, Cykloida, Ślimak Paskala, Wiedźma Agnesi, której szczególnym

przypadkiem jest krzywa rezonansowa). W T-Flexie krzywe te tworzone są na podstawie edytowalnych wzorów matematycznych, które dodatkowo można sparametryzować.

Niemniej jednak, ze względu na dużą popularność oprogramowania Autodesk wśród konstruktorów i badaczy dosyć powszechne stało się projektowanie wspomagane komputerowo z wykorzystaniem programu Inventor, m.in. [5]. Z punktu widzenia modelowania przekładni program ma wysoce praktyczne narzędzie o nazwie Design Accelerator.

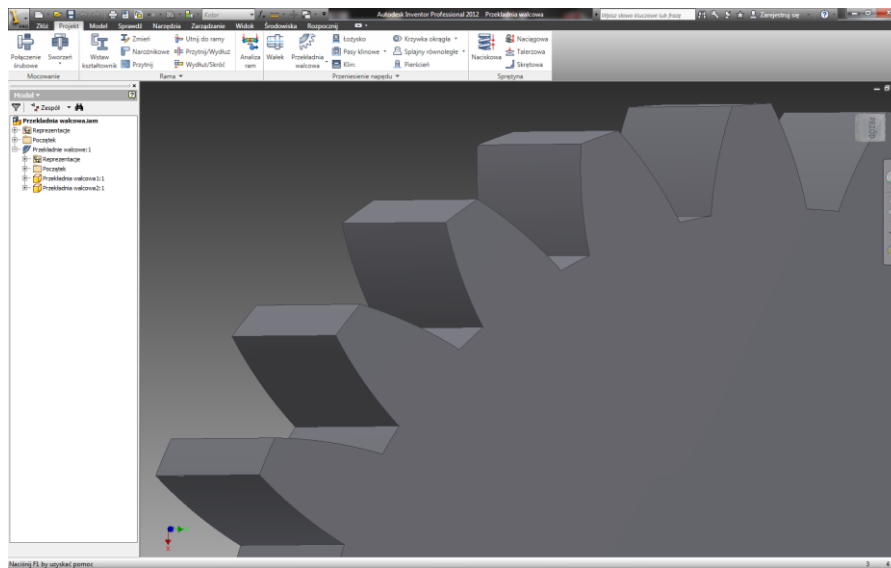
Design Accelerator przedstawia jednak wieńce przekładni w postaci uproszczonej (np. zarys zęba w przekładni stożkowej aproksymowany jest jednym łukiem o promieniu zmiennym wzdłuż szerokości wieńca). Istnieje jednak możliwość sprawdzenia drzewa operacji i przeanalizowania, które wartości są uwzględniane – istnieje możliwość podglądu wszystkich wzorów i parametrów zależnych. Na podstawie takich danych można napisać własny program (macro) w Excelu, wspomagający modelowanie geometryczne wymaganej krzywej poprzez wyznaczenie współrzędnych punktów na drodze przeprowadzonych obliczeń. Poza tym, Design Accelerator generuje raport (.zip), w którym dostarcza wszystkich informacji na temat wartości parametrów (geometrii zębów, wieńca i położenia kół) koniecznych do dokładniejszego zamodelowania całego mechanizmu.

Niestety, w przypadku kół stożkowych fakt, że raport jest generowany prawidłowo wg normy, nie oznacza, że uwzględniając wymagane parametry, uzyskujemy interesujące nas prawidłowo zamodelowane uzębienie. W przekładniach stożkowych każda geometria jest inna (*Gleason, Oerlikon, Klingelnberg, Kurvex* itd.), rozróżniamy różne kształty zarysu zębów (oktoida, FORMATE, HELIXFORM, SPIRAC, ZYKLOMET) i linii zębów (proste, skośne, krzywoliniowe). Kluczowym elementem modelu stożkowego koła zębatego o krzywoliniowej linii zęba jest powierzchnia wrębu złożona z powierzchni bocznych wklęsłej i wypukłej oraz powierzchnia dna wrębu. Powierzchnia wrębu jest odwzorowaniem geometrii narzędzia, parametrów ustawczych obrabiarki oraz kinematyki procesu nacinania. W przypadku kół stożkowych o kołowo-łukowej linii zęba, model wrębów można otrzymać w dwojaki sposób: model bryłowy – uzyskiwany w wyniku symulacji obróbki w określonej liczbie kroków (np. polegającej na *wirtualnym frezowaniu* uzębienia na podstawie danych uzyskanych w obliczeniach konstrukcyjno-technologicznych), oraz model matematyczny powierzchni bocznej uzębienia – w postaci równania parametrycznego lub siatki punktów [3, 4, 8, 9]. Model bryłowy iteracyjny nie nadaje się jednak do analizy kinematyki przekładni oraz analizy wykorzystującej MES. Modelu matematycznego w postaci równania parametrycznego nie można z kolei bezpośrednio przenieść do systemu CAD ze względu na rozbudowany zapis. W tej sytuacji występuje konieczność wygenerowania powierzchni na podstawie punktów uzyskanych z modelu matematycznego, z równania parametrycznego powierzchni albo z rozwiązania numerycznego. Otrzymaną powierzchnię wykorzystuje się do wykonania modelu bryłowego metodą hybrydową [7]. Modele 3D CAD kół stożkowych o kołowo-łukowej linii zęba, otrzymywane metodą hybrydową, charakteryzują się wysoką dokładnością odwzorowania rzeczywistego koła oraz występowaniem gładkich powierzchni bocznych zębów. Takie wykonanie modeli umożliwia ich zastosowanie do późniejszych analiz współpracy przekładni stożkowych w systemach CAD oraz z wykorzystaniem MES. Przy tym mogą także stanowić odniesienie przy pomiarach rzeczywistych kół, jako kontrola na poszczególnych etapach obróbki.

Mniej skomplikowana geometria uzębienia charakteryzuje przekładnie walcowe. W tym przypadku Design Accelerator generuje uzębienie również w postaci uproszczonej, aproksymując jego zarys łukiem. Jednak zamodelowanie prawidłowego zarysu zęba nie jest tak problematyczne i sprowadza się do odpowiedniej modyfikacji bryły koła zębatego. Autor zaproponował jej prześledzenie na przykładzie przekładni o zębach prostych (przełożenie  $z_2/z_1=57/23$ ). Z punktu widzenia metodyki prezentowanej modyfikacji parametry przekładni nie są istotne.

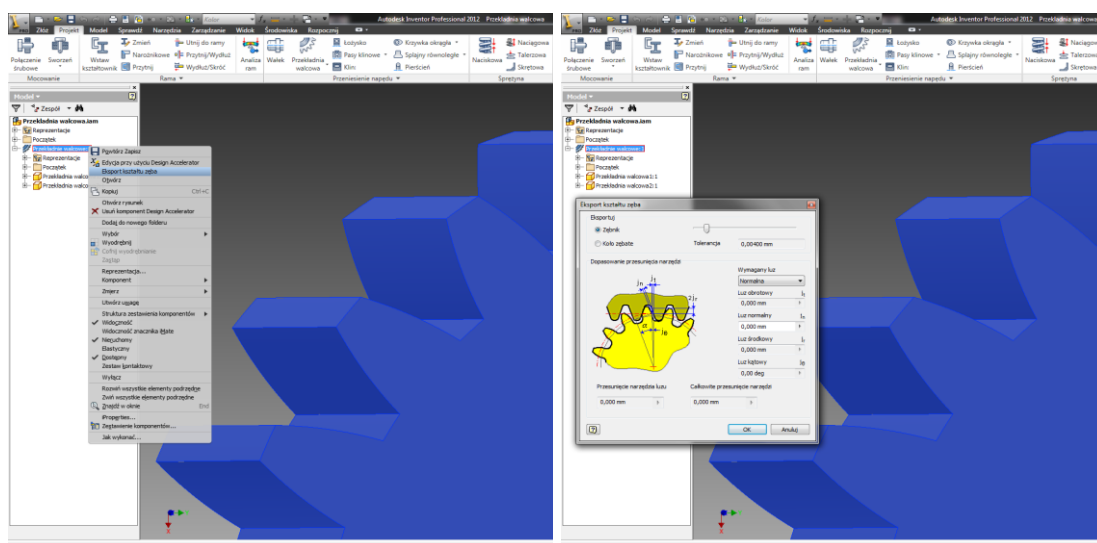
Przykładowa przekładnia została utworzona przez Design Accelerator, który wygenerował jej model z uproszczonym uzębieniem zębnika i koła. Zarys zębów nie jest poprawnie skonstruowaną krzywą ewolwentową (rys. 3).

Procedura modyfikacji brył walcowych kół zębatach tak utworzonych przez Design Accelerator jest następująca. W lewej części ekranu standardowo znajduje się przeglądarka obiektów (drzewo Model), na której znajdują się poszczególne elementy tworzonej części lub zespołu – wielkości predefiniowane (orientacja układu współrzędnych), oraz lista obiektów utworzonych i lista operacji. Należy przesunąć kursor myszy w obszar przeglądarki i zaznaczyć utworzoną przekładnię walcową. Naciskając prawy przycisk myszy, uzyskuje się dostęp do opcji o nazwie „Eksport kształtu zęba” (rys. 4). W ten sposób program Inventor umożliwia nam wyeksportowanie właściwego kształtu zarysu zęba przy zastosowaniu poprawnych parametrów, tj. tolerancja, wymagane luzy i dopasowanie przesunięcia narzędzi.



Rys. 3. Model uproszczonego koła zębatego utworzony przez Design Accelerator

Fig. 3. Simplified model of the gear created by Design Accelerator

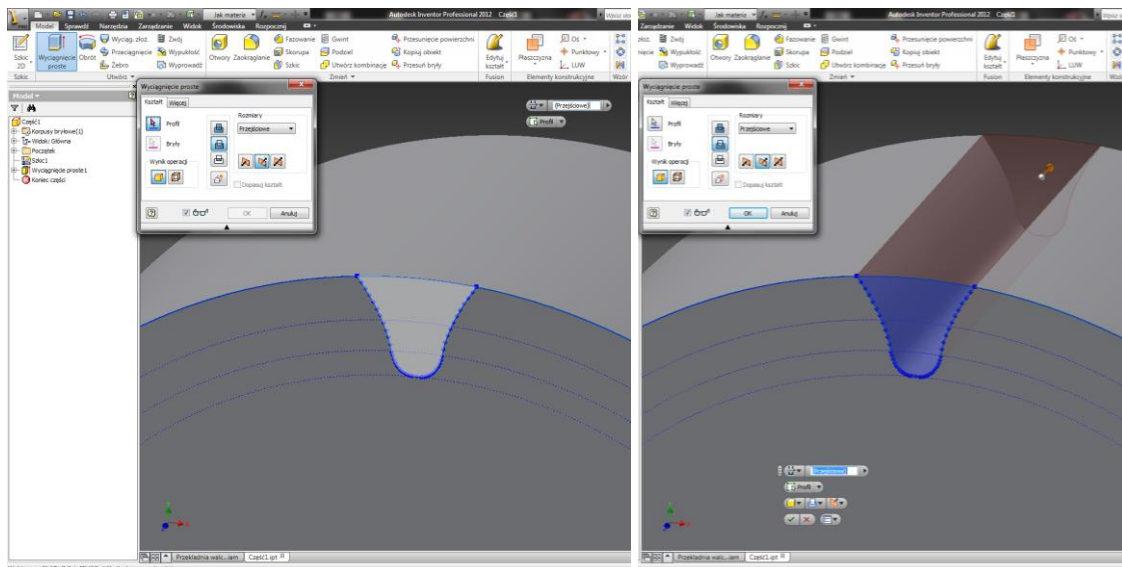


Rys. 4. Eksport kształtu zęba utworzonego przez Design Accelerator

Fig. 4. Export tooth shape created by Design Accelerator

Po zamknięciu okna dialogowego eksportu program automatycznie otwiera plik nowej części i eksportuje zarys zęba (już ewolwentowy) na walec o średnicy wierzchołkowej  $d_a$  zębniaka lub koła (rys. 5), w zależności od dokonanego wyboru. Na walcu zaznaczony jest ponadto wyobraźalny okrąg podziałowy – określający powierzchnię podziałową, w odniesieniu do której wyznaczane są wymiary uzębienia walcowego koła zębatego, a szerokość wrębu jest równa grubości zęba; okrąg podstaw – określający powierzchnię podstaw przylegającą do den wrębów; a dodatkowo także okrąg o średnicy koła zasadniczego  $d_b$ , czyli wyobraźalnego koła, z którego rozwijane są zarysy ewolwentowe boków zębów.

Konieczne jest również uzyskanie przestrzeni między dwoma sąsiednimi zębami konstruowanego koła, która nosi nazwę wrębu. W tym celu musimy dokonać wycięcia odpowiedniej objętości walca, która zawiera się między powierzchniami bocznymi zębów sąsiednich (bokami zębów) a powierzchniami wierzchołków i podstaw. Wycięcie takie uzyskuje się przez wyciągnięcie odpowiedniego profilu czołowego walca (stanowiącego obrys przekroju zawartego między zarysami czołowymi zębów sąsiednich a okręgami wierzchołków i podstaw) zgodnie z kierunkiem linii zęba, korzystając z narzędzia „Wyciągnięcie proste” (rys. 5).



Rys. 5. Ewolwentowy zarys zęba na walcu o średnicy wierzchołkowej – wycięcie wskazanego profilu zgodnie z kierunkiem linii zęba

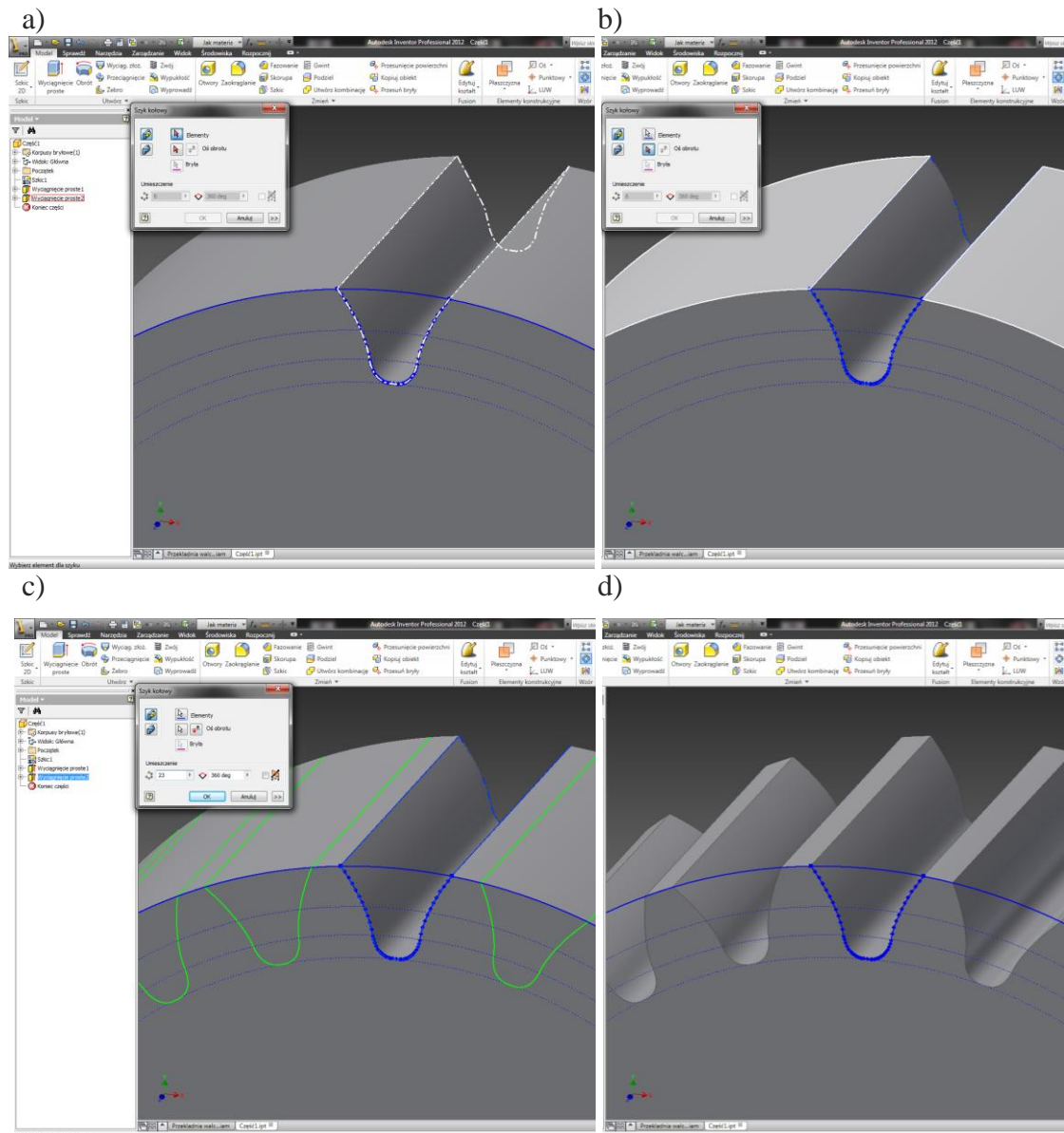
Fig. 5. Involute tooth profile on the cylinder with a diameter of top land – excision of indicated profile in the direction of the line of the tooth

Funkcja o nazwie „Wyciągnięcie proste” to narzędzie do projektowania przestrzennego, które umożliwia tworzenie brył przez dodanie głębokości do otwartych lub zamkniętych profili, czyli poprzez ich pogrubienie (funkcja „Połączenie”). Oprócz tego można również dokonywać operacji odejmowania wyciąganej bryły od już istniejącej (funkcja „Wycięcie”) oraz tworzenia części wspólnej wskazanych elementów konstrukcji (funkcja „Przecięcie”). Istnieje możliwość sprecyzowania tych operacji przez określenie powierzchni/płaszczyzn, od/do których dana operacja ma zostać wykonana. Wobec tego określamy kształt wycięcia, wskazując właściwy profil, który w opcji „Wynik operacji” powinien być zaznaczony jako zamknięty. Z kolei w opcji „Rozmiary” wyciągnięcia prostego należy zaznaczyć Przejściowe, gdyż wycięcie musi być utworzone na całej szerokości walca. Następnie należy wybrać kierunek wyciągnięcia, zgodny z kierunkiem linii zęba i zatwierdzić „OK”. Tym sposobem zostaje utworzony wrębu.

Po wykonaniu powyższych operacji zadanie sprowadza się do powielenia uzyskanego wrębu po obwodzie walca o wymaganej liczbie zębów. W tym celu należy wykorzystać narzę-

dzie „Szyk kołowy”, które kopiuje elementy i bryły oraz ustawia je w łuk lub szyk kołowy (rys. 6).

Po wybraniu opcji „Elementy” należy wskazać wręb wykonany na poboczniccy walca, co sprowadza się do wskazania właściwej powierzchni (rys. 6a). Następnie należy wybrać opcję „Oś obrotu” i wskazać pobocznice walca, czyli powierzchnię wierzchołków (rys. 6b). Opcja „Umieszczenie” (rys. 6c) składa się z dwóch pól: liczba elementów szyku (należy podać wymaganą liczbę zębów/wrębów) i kąt szyku (domyślnie  $360^\circ$  dla szyku kołowego). W ten sposób zostaje utworzone (odtworzone) walcowe koło zębate z prawidłowo zamodelowanym zarysem ewolwentowym zębów (rys. 6d).



Rys. 6. Tworzenie duplikatów wrębu za pomocą narzędzia „Szyk kołowy”: a) opcja „Elementy” – wskazanie wrębu (zarysu zęba), b) opcja „Oś obrotu” – wskazanie poboczniccy walca, c) opcja „Umieszczenie” – wprowadzenie liczby elementów szyku i kąta szyku, d) walcowe koło zębate z prawidłowo zamodelowaną geometrią zarysu ewolwentowego zęba

Fig. 6. Duplicating notch by using "circular pattern": a) the "Features" – an indication of the notch (tooth profile), b) the "Rotation Axis" – an indication of the cylinder surface (top land), c) the "Placement" – enter the number of array elements and the angle of the array, d) Spur gear with properly modeled geometry of involute tooth profile

#### 4. PODSUMOWANIE

W świetle symulacyjnych metod badań modeli uzębienia, zagadnieniem istotnym jest precyzyjne modelowanie geometrii ewolwentowego zarysu zębów, co ma zasadniczy wpływ na dokładność identyfikacji wartości przebiegu sztywności zazębienia. W praktyce pojawia się problem z zachowaniem dostatecznej dokładności ze względu na stosowanie uproszczeń zarówno zarysu zębów, jak i ich obciążenia. Problematyka ta ma szczególne znaczenie w odniesieniu do badań zjawisk dynamicznych zachodzących w przekładniach zębatych, prowadzonych za pomocą modeli dynamicznych, gdzie na skutek niewystarczającej dokładności pomiarów identyfikujących wartości parametrów obiektu modelowanego (m.in. sztywności zazębienia) mogą się pojawić rozbieżności pomiędzy przewidywanym (za pomocą symulacji) a faktycznym zachowaniem się obiektu rzeczywistego (w trakcie badań doświadczalnych).

Proces projektowania uzębień przekładni jest zadaniem trudnym, wymagającym od projektanta sporego doświadczenia zarówno w zakresie konstrukcji, jak i technologii obróbki takich części maszyn. Ponadto, sam proces wdrażania do produkcji kół przekładni jest czasochłonny, gdyż nieraz związany jest z wielokrotnie powtarzаныmi obróbkami uzębienia i korygowaniem śladu współpracy, jak to ma miejsce w przypadku kół stożkowych. Z tego względu podejmuje się wiele prób zastosowania wspomaganie komputerowego do procesu projektowania. Jednym z takich przykładów jest generowanie bryłowych modeli przestrzennych w systemach 3D CAD – na przykład w procesie symulacji obróbki polegającej na wirtualnym frezowaniu uzębienia na podstawie danych uzyskanych w obliczeniach konstrukcyjno-technologicznych bądź też metodą hybrydową, z wykorzystaniem powierzchni wygenerowanej na podstawie punktów uzyskanych z modelu matematycznego.

Programy CAD jako zbyt uniwersalne w pełni nie przejmują zadań CAM, które uwzględniają specyfikę i technologię konkretnej maszyny bądź mechanizmu. Nie jest to priorytetem dostawców tego typu oprogramowania. Niemniej umożliwiają one zdefiniowanie modelu geometrycznego dowolnego kształtu krzywej (również ewolwenty). Jedynym ograniczeniem jest dokładność modelowania, która w przypadku ewolwentowego zarysu zębów jest wystarczająca do prowadzenia badań takiego modelu uzębienia metodą symulacji komputerowej, posługując się na przykład Metodą Elementów Skończonych.

#### Bibliografia

1. Cai Y.: Simulation on the rotational vibration of helical gears in consideration of the tooth separation phenomenon (a new stiffness function of helical involute tooth pair). *Transaction of ASME, Journal of Mechanical Design*, No. 117 (1995), p. 460-469.
2. Grzesica P.: Identyfikacja sztywności zazębienia Metodą Elementów Skończonych. *Biblioteka TEMAG, Vol. XIX, Politechnika Śląska, Instytut Mechanizacji Górnictwa, Gliwice – Ustroń, 19-21.10.2011, s. 103-108.*
3. Marciniak A., Pisula J., Płocica M., Sobolewski B.: Projektowanie przekładni stożkowych z zastosowaniem modelowania matematycznego i symulacji w środowisku CAD. *Mechanik*, nr 7/2011, s. 602-605.
4. Marciniak A., Sobolewski B.: Method of spiral bevel gear tooth contact analysis performed in CAD environment. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, Vol. 85, Issue 6, 2013, p. 467-474.
5. Marciniak A., Sobolewski B.: Zastosowanie system Autodesk Inventor do symulacji współpracy przekładni stożkowych Gleasona. *Mechanik*, nr 1/2012, s. 76-77.



6. Petersen D.: Auswirkungen der Lastverteilung auf die Zahnfußtragfähigkeit von hochüberdeckenden Stirnradpaarungen. Techn. Univ. Braunschweig, 1989.
7. Pisula J., Sobolewski B.: Metoda hybrydowa tworzenia modelu 3D-CAD stożkowego koła zębatego o kołowo-lukowej linii zęba. XII Forum Inżynierskiego ProCAX, Sosnowiec – Siewierz, 2-3 października 2013.
8. Rakowiecki T., Skawiński P., Siemiński P.: Wykorzystanie parametrycznych szablonów systemu 3D CAD do generowania modeli uzębień kół stożkowych. Mechanik, nr 12/2011, s. 977-979.
9. Skawiński P., Siemiński P., Pomianowski R.: Generowanie modeli bryłowych uzębień stożkowych za pomocą symulacji oprogramowanych w systemie 3D CAD. Mechanik, nr 11/2011, s. 922-924.
10. Umezawa K.: Deflection due to contact between gear teeth with finite width. Bulletin of JSME, Vol. 16, No. 97, p. 1085-1092.