

Krzysztof TWARDOCH<sup>1</sup>

## DYSKRETNY MODEL DYNAMICZNY PRZEKŁADNI ZĘBATEJ STOŻKOWEJ – WERYFIKACJA KODU ŹRÓDŁOWEGO PROGRAMU DO SYMULACJI NUMERYCZNEJ

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono nowe modele fizyczny i matematyczny przekładni zębatej stożkowej do badania wpływu parametrów konstrukcyjnych oraz eksploatacyjnych na stan dynamiczny przekładni. Omówiono przebieg procesu weryfikacji poprawności działania autorskiego programu obliczeniowego służącego do wyznaczenia rozwiązań modelu dynamicznego przekładni zębatej stożkowej. Zaprezentowano schemat blokowy algorytmu obliczeniowego, który posłużył do stworzenia programu na potrzeby symulacji numerycznej. Kod źródłowy programu został napisany w języku interaktywnego środowiska do wykonywania obliczeń naukowych i inżynierskich MATLAB.

**Słowa kluczowe:** przekładnia zębata stożkowa, model dynamiczny, weryfikacja, walidacja, metoda symulacji numerycznej, symulacja komputerowa, MATLAB

## DISCRETE DYNAMIC MODEL OF BEVEL GEAR – VERIFICATION THE PROGRAM SOURCE CODE FOR NUMERICAL SIMULATION

**Summary.** In the article presented a new model of physical and mathematical bevel gear to study the influence of design parameters and operating factors on the dynamic state of the gear transmission. Discusses the process of verifying proper operation of copyright calculation program used to determine the solutions of the dynamic model of bevel gear. Presents the block diagram of a computing algorithm that was used to create a program for the numerical simulation. The program source code is written in an interactive environment to perform scientific and engineering calculations, MATLAB.

**Keywords:** bevel gear, dynamic model, verification, validation, numerical simulation method, computer simulation, MATLAB

### 1. WPROWADZENIE

W procesie projektowania i kształtowania konstrukcyjnego przekładni zębatych, zwłaszcza przekładni stożkowych, istotna jest dokładność obliczeń wytrzymałościowych. W tym aspekcie jednym z najistotniejszych zadań jest prawidłowe określenie zarówno geometrii współpracujących elementów tego mechanizmu, jak i obciążenia obliczeniowego

---

<sup>1</sup> Faculty of Mining and Geology, The Silesian University of Technology, Gliwice, Poland,  
e-mail: krzysztof.twardoch@polsl.pl

wynikającego z obciążenia zewnętrznego oraz wzbudzeń będących skutkiem czynników wewnętrznych. Ponadto, jak wynika z przeprowadzonych badań i konkluzji [2, 6], ważne jest rozpoznanie istoty zjawisk dynamicznych, które są odpowiedzialne za synergię obciążeń zewnętrznych i wzbudzeń wewnętrznych przekładni na generowane w zazębieniu siły dynamiczne. Występowanie efektu synerгии wzbudzeń ma bezpośredni wpływ na trwałość oraz niezawodność projektowanego mechanizmu, jakim jest przekładnia zębata stożkowa. Przeglądając literaturę, [1, 7, 8, 9] można stwierdzić, iż aktualny stan wiedzy nie ujmuje wyczerpująco problematyki wpływu poszczególnych parametrów przekładni (np. sztywności zazębienia, tłumienia w zazębieniu) na jej aktywność dynamiczną.

Wobec powyższego pożądane jest przeprowadzenie badań, które pozwolą określić przedziały wartości parametrów, dla których stan obciążenia przekładni stożkowej będzie optymalny względem warunków pracy. Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na to, że duża liczba kombinacji parametrów konstrukcyjno-eksploatacyjnych powoduje trudności w prowadzeniu badań złożonych interakcji dynamicznych zachodzących w przekładni wyłącznie na obiekcie rzeczywistym [8, 9, 11, 12, 13]. Dlatego eksperyment na obiekcie rzeczywistym jest wspomagany badaniami teoretycznymi na modelach dynamicznych przekładni zębatych [2, 3, 4, 5, 6, 8, 9]. Taka metoda badań niekiedy jest jedyną metodą, która pozwala zidentyfikować wpływ parametrów konstrukcyjnych i technologicznych oraz czynników eksploatacyjnych na przebieg zjawisk dynamicznych zachodzących w przekładni i umożliwia ocenę wpływu jakościowego i ilościowego generowanych przez źródła zewnętrzne i wewnętrzne drgań elementów przekładni na obciążenie międzyzębne. *Ipsa facto* zdecydowano się właśnie na przeprowadzenie badań z wykorzystaniem wspomaganie komputerowego, stosując metodę symulacji numerycznej, która wydaje się najbardziej adekwatna do przeprowadzenia wspomnianych analiz. Uzyskana wiedza pozwoli konstruktorom na projektowanie przekładni stożkowych optymalnych ze względu na ich stan dynamiczny, co z kolei będzie miało bezpośredni wpływ na zwiększenie ich ogólnie pojętej dobroci.

## 2. DYSKRETNY MODEL DYNAMICZNY PRZEKŁADNI ZĘBATEJ STOŻKOWEJ

W celu ustalenia związków przyczynowo-skutkowych parametrów konstrukcyjnych przekładni z jej stanem dynamicznym dokonano syntezy modelu dynamicznego przekładni zębatej stożkowej. Powstał dyskretny model fizyczny przekładni (rys. 1), na podstawie którego wyprowadzono układ 12 nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu, składających się na model matematyczny przekładni w następującej postaci:

$$J_{z1} \cdot \ddot{\theta}_{z1} + k_{0z1-2} \cdot (\dot{\theta}_{z1} - \dot{\theta}_{z2}) + c_{0z1-2} \cdot (\theta_{z1} - \theta_{z2}) = T_1(t) \quad (1)$$

$$J_{z2} \cdot \ddot{\theta}_{z2} + k_{0z1-2} \cdot (\dot{\theta}_{z2} - \dot{\theta}_{z1}) + c_{0z1-2} \cdot (\theta_{z2} - \theta_{z1}) = -r_{m1} \cdot \psi_o \cdot F_n^\Sigma(t) \quad (2)$$

$$J_{y3} \cdot \ddot{\theta}_{y3} + k_{0y3-4} \cdot (\dot{\theta}_{y3} - \dot{\theta}_{y4}) + c_{0y3-4} \cdot (\theta_{y3} - \theta_{y4}) = r_{m2} \cdot \psi_o \cdot F_n^\Sigma(t) \quad (3)$$

$$J_{y4} \cdot \ddot{\theta}_{y4} + k_{0y3-4} \cdot (\dot{\theta}_{y4} - \dot{\theta}_{y3}) + c_{0y3-4} \cdot (\theta_{y4} - \theta_{y3}) = T_4(t) \quad (4)$$

$$J_{x2} \cdot \ddot{\theta}_{x2} + k_{0x2} \cdot \dot{\theta}_{x2} + c_{0x2} \cdot \theta_{x2} = -r_{m1} \cdot \psi_a \cdot F_n^\Sigma(t) \quad (5)$$

$$J_{x3} \cdot \ddot{\theta}_{x3} + k_{0x3} \cdot \dot{\theta}_{x3} + c_{0x3} \cdot \theta_{x3} = r_{m2} \cdot \psi_r \cdot F_n^\Sigma(t) \quad (6)$$

$$m_{1-2} \cdot \ddot{q}_{x2} + k_{qx1-2} \cdot \dot{q}_{x2} + c_{qx1-2} \cdot q_{x2} = -\psi_o \cdot F_n^\Sigma(t) \quad (7)$$

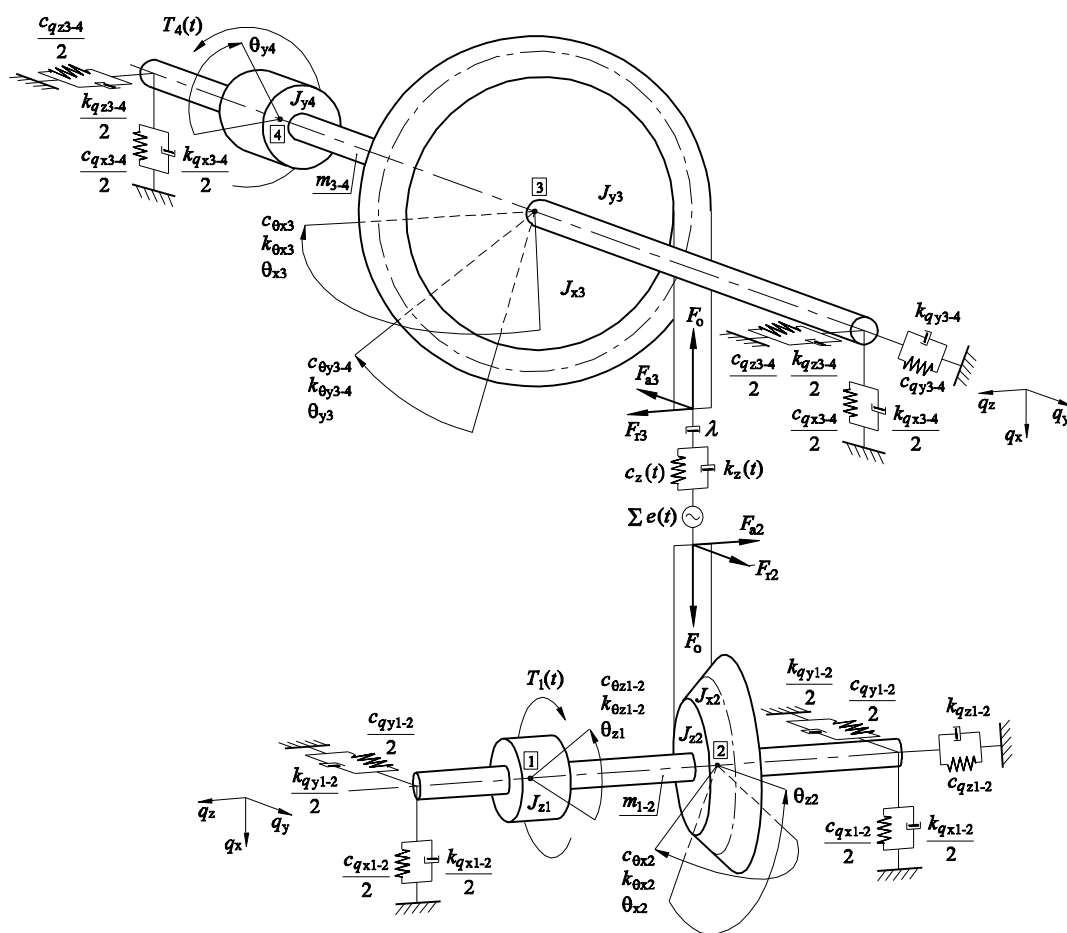
$$m_{3-4} \cdot \ddot{q}_{x3} + k_{qx3-4} \cdot \dot{q}_{x3} + c_{qx3-4} \cdot q_{x3} = \psi_o \cdot F_n^\Sigma(t) \quad (8)$$

$$m_{1-2} \cdot \ddot{q}_{y2} + k_{qy1-2} \cdot \dot{q}_{y2} + c_{qy1-2} \cdot q_{y2} = -\psi_r \cdot F_n^\Sigma(t) \quad (9)$$

$$m_{3-4} \cdot \ddot{q}_{y3} + k_{qy3-4} \cdot \dot{q}_{y3} + c_{qy3-4} \cdot q_{y3} = \psi_r \cdot F_n^\Sigma(t) \quad (10)$$

$$m_{1-2} \cdot \ddot{q}_{z2} + k_{qz1-2} \cdot \dot{q}_{z2} + c_{qz1-2} \cdot q_{z2} = \psi_a \cdot F_n^\Sigma(t) \quad (11)$$

$$m_{3-4} \cdot \ddot{q}_{z3} + k_{qz3-4} \cdot \dot{q}_{z3} + c_{qz3-4} \cdot q_{z3} = -\psi_a \cdot F_n^\Sigma(t) \quad (12)$$



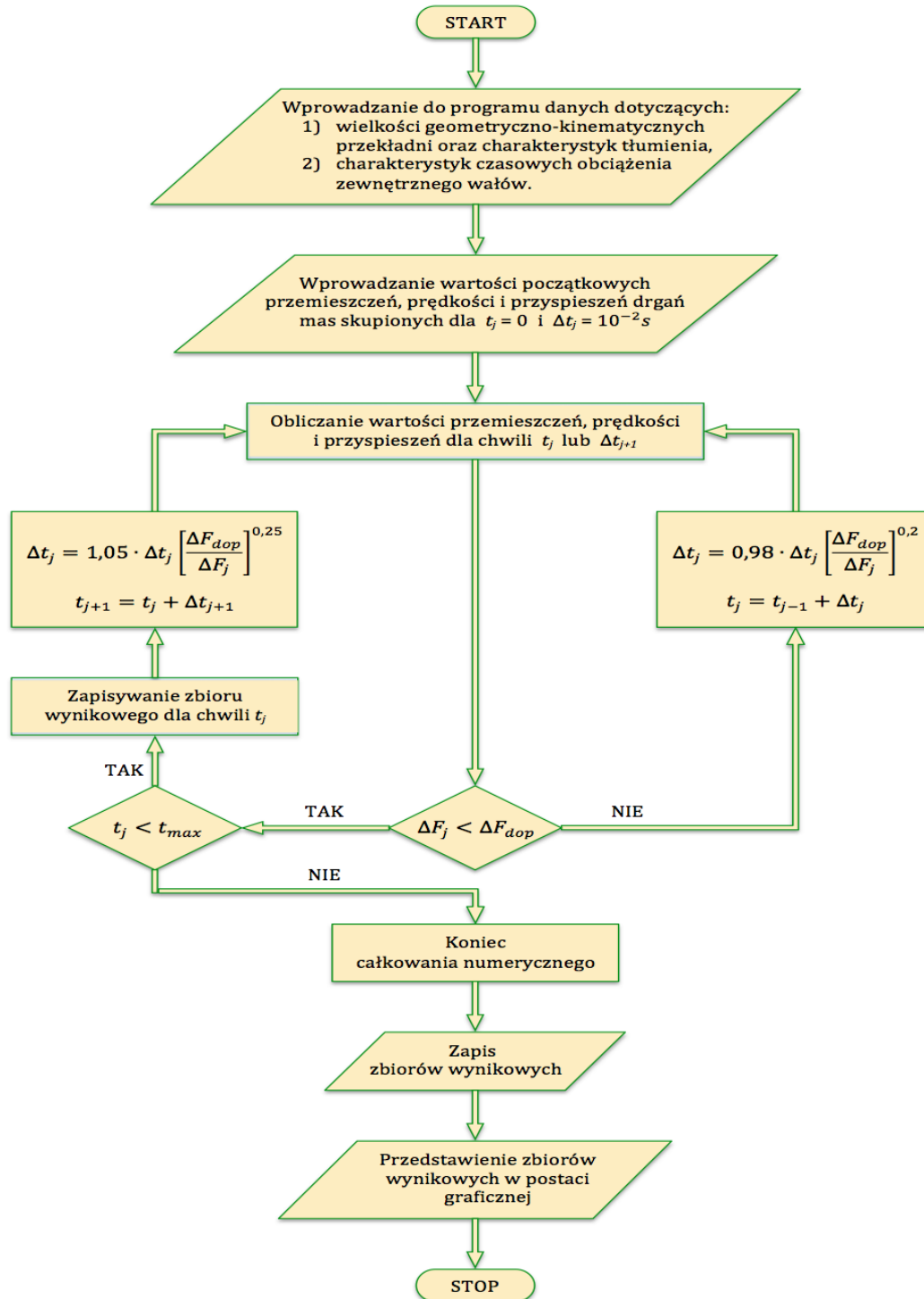
Rys. 1. Model fizyczny przekładni zębatej stożkowej  
Fig. 1. Physical model of bevel gear

Dokładny opis zaprezentowanego modelu dynamicznego wraz z objaśnieniem symboliki znajduje się w publikacji [6].

Przekładnia została potraktowana jako obiekt odizolowany od wpływu maszyny roboczej, w którym dokładnie zostały odwzorowane własności zazębienia przez założenie nieliniowości charakterystyk sztywności oraz tłumienia, a także wpływ luzu międzyzębnego na generowane obciążenie dynamiczne w zazębieniu przekładni.

### 3. ALGORYTM ROZWIĄZYWANIA MODELU MATEMATYCZNEGO PRZEKŁADNI ZĘBATEJ STOŻKOWEJ

W celu uzyskania rozwiązania modelu matematycznego został przygotowany program komputerowy, którego algorytm przedstawiono na rys. 2. Składa się on z kilku głównych modułów, które służą do wprowadzania danych, numerycznego całkowania oraz zapisu danych wyników.



Rys. 2. Algorytm wyznaczania rozwiązań modelu matematycznego przekładni zębatej  
Fig. 2. Algorithm for solution of a mathematical model of bevel gear

Rozwiązaniem modelu matematycznego jest zbiór funkcji opisujących przebiegi czasowe:

- przemieszczeń, prędkości, przyspieszeń będących niewiadomymi w równaniach różniczkowych,
- sił międzyzębnych występujących w przyporach prawidłowych i nieprawidłowych.

Moduł do wprowadzania danych wejściowych został podzielony na dwie grupy obejmujące:

- parametry geometryczno-konstrukcyjne modelu przekładni wraz ze stałą wartością wskaźnika obciążenia jednostkowego zębów:
  - wskaźnik nominalnego obciążenia jednostkowego zębów,
  - współczynniki tłumienia elementów dyssypacyjnych modelu,
  - parametry geometryczne zazębienia,
  - przebieg sumarycznej odchyłki kinematycznej współpracy koła i zębniaka,
- wielkości początkowe parametrów całkowania numerycznego:
  - macierz początkowych przemieszczeń w ruchu drgającym,
  - macierz początkowych prędkości w ruchu drgającym,
  - macierz początkowych przyspieszeń w ruchu drgającym,
  - początkowy krok całkowania.

Po wprowadzeniu danych do programu z pierwszego modułu następuje przejście do drugiego modułu, w którym następuje rozpoczęcie całkowania numerycznego. W pierwszej kolejności wyznaczane są przybliżone wartości macierzy w chwili  $t_j$  z zachowaniem zadanej wstępnie długości kroku całkowania  $\Delta t_j$  oraz macierzy warunków początkowych. W chwili gdy dla każdego  $i$ -tego równania zostaje spełniony założony warunek dokładności  $\Delta \Phi_{\text{dop}} > \Delta \Phi_{\text{ji}}$ , następuje przejście do kolejnego kroku całkowania z równoczesnym zaakceptowaniem aproksymacji dla chwili  $t_j$  i zapisaniem do pliku danych wynikowych. Jeżeli natomiast warunek dokładności nie zostanie spełniony, całkowanie w chwili  $t_j$  jest powtarzane z odpowiednio skróconym krokiem całkowania. Operacja całkowania numerycznego ulega przerwaniu w momencie przekroczenia przez wielkość  $t_j$  zadanej wartości  $t_{\text{max}}$ . Wyniki z przeprowadzonego całkowania numerycznego mogą być przedstawione w postaci graficznej oraz posłużyć do dalszych obliczeń w celu wyznaczenia m.in. wartości sumarycznej siły międzyzębnej występującej w przekładni stożkowej.

#### 4. WERYFIKACJA KODU ŹRÓDŁOWEGO PROGRAMU DO SYMULACJI NUMERYCZNEJ

W budowie maszyn do badań zjawisk dynamicznych szczególnie predysponowana jest metoda symulacyjna, polegająca na rozwiązywaniu modeli matematycznych z zastosowaniem wspomagania komputerowego [10]. Potrzeba wykonania symulacji numerycznej wymaga opracowania programu obliczeniowego, który będzie w sposób wiarygodny generował reakcje dynamiczne modelu.

Kod źródłowy programu umożliwiającego wyznaczenie rozwiązań modelu matematycznego przekładni zębatej stożkowej został napisany w języku interaktywnego środowiska do wykonywania obliczeń naukowych i inżynierskich MATLAB. W celu sprawdzenia poprawności wykonywanych obliczeń i generowanych wyników przez program komputerowy został przeprowadzony proces weryfikacji jego kodu źródłowego. Proces ten jest w rezultacie również pierwszym etapem działań zmierzających do rozstrzygnięcia adekwatności modelu przekładni zębatej stożkowej.

Weryfikację programu w aspekcie jego złożoności (również obliczeniowej) prowadzono równoległe z podjętymi nad nim pracami. Wpłynęło to istotnie na efektywność tego procesu i pozwoliło w znaczny sposób zaoszczędzić nakłady czasu wymaganego do jego przeprowadzenia oraz wyeliminowania ewentualnych błędów. Przeprowadzenie weryfikacji dopiero po sfinalizowaniu prac nad przygotowaniem programu powoduje, że wykrycie błędów staje się bardzo kłopotliwe i czasochłonne.

Konfirmacji zostały poddane procedury składające się na moduły, które służą do wprowadzenia danych, całkowania numerycznego oraz zapisu danych wynikowych. Ze szczególną uwagą i rzetelnością sprawdzono zgodność równań różniczkowych zapisanych w odpowiednim M-pliku programu MATLAB (module całkowania numerycznego) z równaniami modelu matematycznego przekładni zębatej. Poprawność wyników generowanych przez poszczególne części modułu została zweryfikowana przez przeprowadzenie kalkulacji sprawdzających. Stwierdzono zgodność wyników.

Dokonano identyfikacji i eliminacji błędów syntaktycznych (polegających na naruszeniu reguł opisujących składnię języka) oraz błędów wykonania za pomocą debuggera<sup>2</sup> środowiska programistycznego MATLAB. W końcowym etapie prac sprawdzono również logiczną spójność programu oraz skonfrontowano wynik prac nad przygotowaniem programu z nadrzędną koncepcją jego zastosowania. Przeanalizowano stabilność działania systemu.

Ostatecznym krokiem prowadzącym przez proces weryfikacji było sprawdzenie poprawności obliczeń wykonywanych przez program z punktu widzenia teorii zazębienia ewolwentowego. Z teorii tej wiadomo, że sumaryczna siła międzyzębna jest równa:

$$F^{\Sigma} = \frac{T_1}{r_{m1}} \quad (13)$$

gdzie:

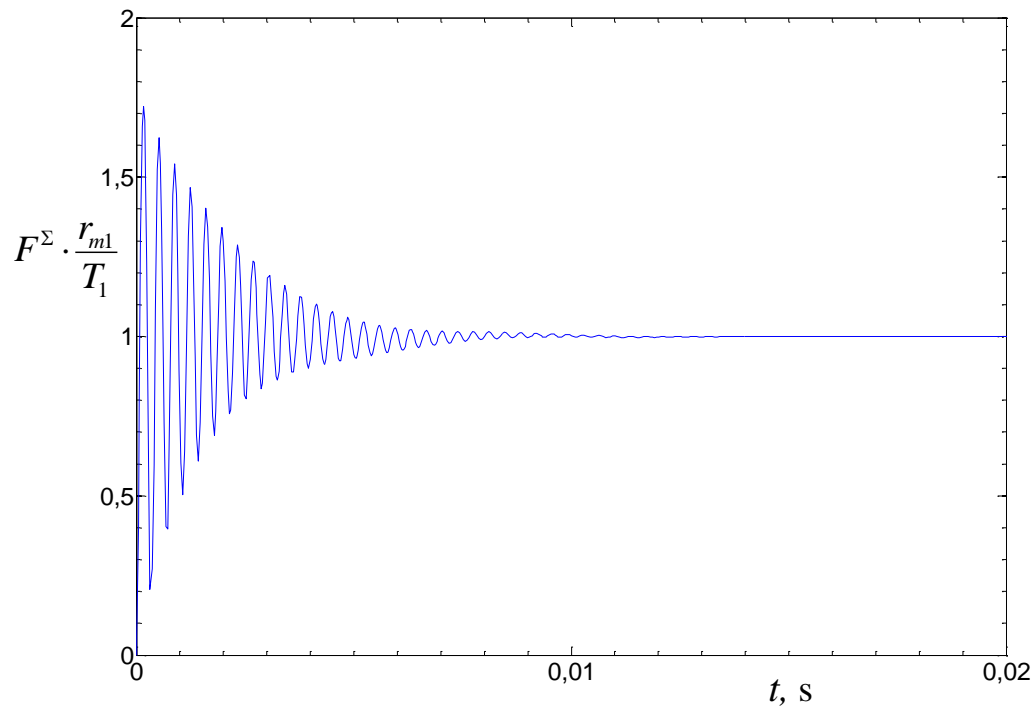
$T_1$  – stały moment obrotowy działający na wał koła stożkowego (zębniaka),

$r_{m1}$  – promień zasadniczy średni koła stożkowego (zębniaka).

Po przekształceniu powyższego równania do postaci  $F^{\Sigma} \cdot \frac{r_{m1}}{T_1}$  jest ono równe jedności.

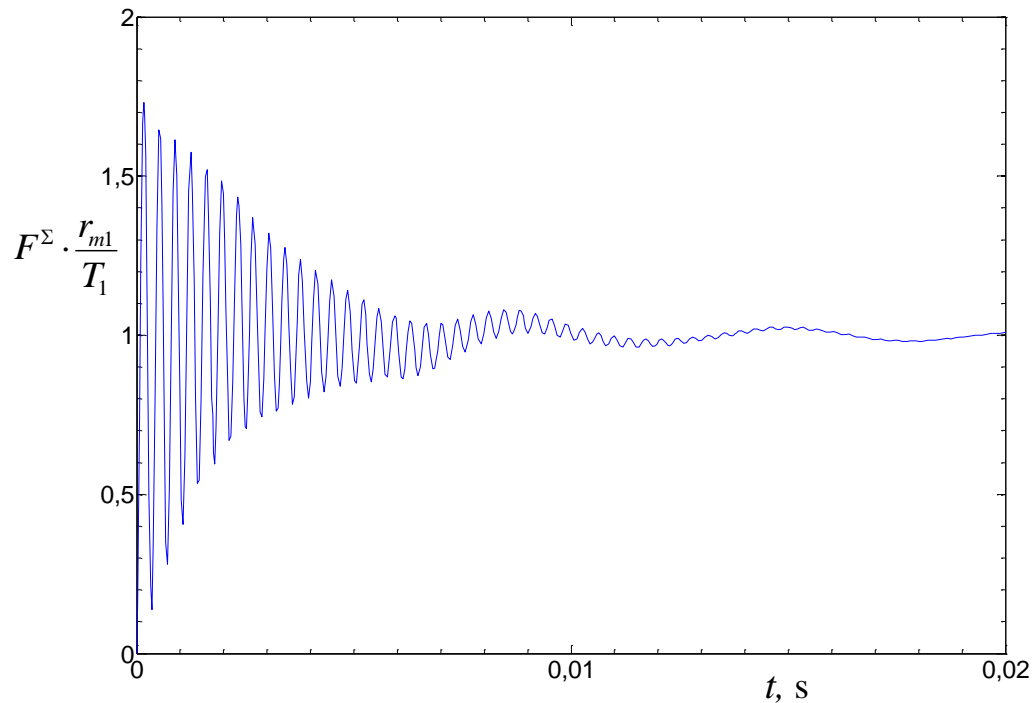
Przy uwzględnieniu tej zależności została przeprowadzona symulacja pracy przekładni na modelu dynamicznym, przy założeniu że sztywność zazębienia jest funkcją stałą, a macierz początkowych przemieszczeń jest macierzą zerową. Wynik tej symulacji został przedstawiony dla dwóch przypadków. W pierwszym uwzględniono tylko drgania skrętne zazębienia przy dużym tłumieniu drgań poprzecznych wału (rys. 3). Jak można zauważyć, w dziedzinie czasu obciążenie zazębienia ulega wahaniom o malejącej amplitudzie aż do ustalenia się wartości na poziomie jedności. Z kolei w drugim przypadku uwzględniono zarówno drgania skrętne zazębienia, jak i drgania poprzeczne wału, co ilustruje rys. 4. Podobnie i tym razem również można zauważyć, że obciążenie zazębienia ulega wahaniom o malejącej amplitudzie, z tym że pojawia się dodatkowa amplituda drgań poprzecznych wału, co skutkuje pewną inercją w ustaleniu wartości obciążenia na poziomie jedności. Wynik symulacji dla zmiennej w funkcji czasu asymetrycznej sztywności zazębienia przedstawiono na rys. 5. W tym przypadku wahania wielkości nie ulegają wytłumieniu, jednak można zaobserwować, że w dziedzinie czasu drgania mają charakter okresowy, będący skutkiem zmieniającej się periodycznie sztywności zazębienia. Średnia wartość tych drgań jest także równa jedności, co jest zgodne z własnością reprezentowaną przez równanie (13).

<sup>2</sup> Debugger – program komputerowy będący integralną częścią środowiska programistycznego, służący do dynamicznej analizy innych programów w celu odnalezienia i identyfikacji zawartych w nich błędów, zwanych z angielskiego bugami. Podstawowym zadaniem debuggera jest sprawowanie kontroli nad wykonaniem kodu, co umożliwia zlokalizowanie instrukcji odpowiedzialnych za wadliwe działanie programu i wstrzymanie jego działania w określonych miejscach.



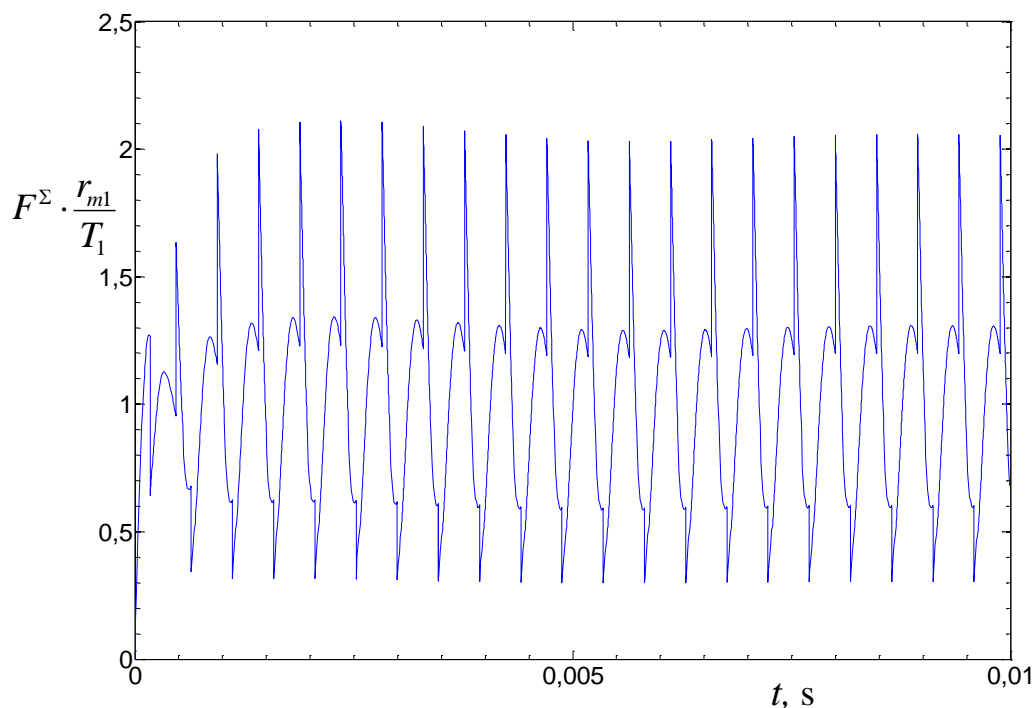
Rys. 3. Przebieg czasowy sumarycznej siły międzyzębnej  $F^\Sigma$  odniesionej do nominalnej siły statycznej  $T_1/r_{m1}$  przy stałej sztywności zazębienia (tylko drgania skrętne)

Fig. 3. The time course of the total interdenal force  $F^\Sigma$  referred to the nominal static force  $T_1/r_{m1}$  at constant mesh stiffness (only torsional vibrations)



Rys. 4. Przebieg czasowy sumarycznej siły międzyzębnej  $F^\Sigma$  odniesionej do nominalnej siły statycznej  $T_1/r_{m1}$  przy stałej sztywności zazębienia (drgania skrętne i poprzeczne)

Fig. 4. The time course of the total interdenal force  $F^\Sigma$  referred to the nominal static force  $T_1/r_{m1}$  at constant mesh stiffness (torsional and transverse vibrations)



Rys. 5. Przebieg czasowy sumarycznej siły międzyzębnej  $F^{\Sigma}$  odniesionej do nominalnej siły statycznej  $T_1/r_{m1}$  przy zmiennej w funkcji czasu sztywności zazębienia

Fig. 5. The time course of the total interdenal force  $F^{\Sigma}$  referred to the nominal static force  $T_1/r_{m1}$  at time-varying mesh stiffness

Przeprowadzenie omówionych powyżej czynności kontrolnych potwierdziło prawidłowe działanie programu komputerowego, zatem kod źródłowy programu nie jest obciążony błędami i może być zakwalifikowany do przeprowadzenia procesu walidacji.

## 5. PODSUMOWANIE

Proces weryfikacji ukierunkowany na konfirmację jest z reguły przeprowadzany przez autorów programu, gdyż oni najlepiej znają jego specyfikę. Weryfikacja powinna być przeprowadzona skrupulatnie i krytycznie. Tylko rzetelne i kompleksowe podejście do tego zagadnienia gwarantuje potencjalnie największą wiarygodność przeprowadzanych symulacji na modelu dynamicznym przekładni.

W celu sprawdzenia poprawności obliczeń wykonywanych przez program komputerowy został przeprowadzony dwuetapowy proces jego weryfikacji. Szczegółowej kontroli poddano zapisy procedur składających się na poszczególne moduły programu, przeprowadzając ponadto kalkulacje sprawdzające generowanych wyników. Następnie, w drugim etapie, była przeprowadzona kontrola poprawności obliczeń wykonywanych przez program z punktu widzenia teorii zazębienia ewolwentowego. Prawidłowe działanie programu w tym aspekcie ilustrują rys. 3 i 4.

Proces weryfikacji potwierdził poprawność działania programu obliczeniowego służącego do wyznaczania rozwiązań modelu dynamicznego przekładni zębatej stożkowej.



**Bibliografia**

1. Grzesica P.: Identyfikacja sztywności zazębienia Metodą Elementów Skończonych. Biblioteka TEMAG, Vol. XIX, Politechnika Śląska, Instytut Mechanizacji Górnictwa, Gliwice – Ustroń, 19-21.10.2011, s. 103-108.
2. Grzesica P.: Wpływ obciążenia zewnętrznego na siły międzyzębne w przekładniach zębatych maszyn górniczych. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2011.
3. Grzesica P., Kuczaj M.: Dyskretny model dynamiczny dwustopniowej przekładni walcowej o zębach śrubowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, nr 1798, s. Górnictwo, z. 286, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2008.
4. Grzesica P., Kuczaj M.: Model dynamiczny dwustopniowej przekładni walcowej o zębach śrubowych obciążonej zmiennym momentem obrotowym. Biblioteka TEMAG, Vol. XVI, Politechnika Śląska, Instytut Mechanizacji Górnictwa, Gliwice-Ustroń, 22-24.10.2008, s. 135-144.
5. Grzesica P., Twardoch K.: Dyskretny modele dynamiczne w badaniach przekładni zębatych. Biblioteka TEMAG, Vol. XIV, Politechnika Śląska, Instytut Mechanizacji Górnictwa, Gliwice – Ustroń, 25-27.10.2006, s. 87-96.
6. Grzesica P., Twardoch K.: Dyskretny model dynamiczny przekładni zębatej stożkowej. Biblioteka TEMAG, Vol. XVII, ISBN-978-83-61442-08-0, Politechnika Śląska, Instytut Mechanizacji Górnictwa, Gliwice-Ustroń, 14-16.10.2009, s. 127-136.
7. Müller L.: Przekładnie zębate – dynamika. WNT, Warszawa 1986.
8. Skoć A.: Dynamika przekładni zębatych stożkowych maszyn górniczych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, nr 1317, s. Górnictwo, z. 226, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1996.
9. Skoć A.: Prognozowanie własności dynamicznych przekładni zębatych stożkowych. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2007.
10. Skoć A., Spalek J., Markusik S.: Podstawy Konstrukcji Maszyn. Tom 2. Wydawnictwa Naukowo – Techniczne, Warszawa 2008.
11. Skoć A. (red.): Identyfikacja stanu dynamicznego i trwałości przekładni zębatych z kołami o uzębieniu wysokim. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2008.
12. Zajler W.: Siły dynamiczne w przekładniach dwustopniowych. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1974.
13. Zimroz R.: Metoda diagnostyki wielostopniowych przekładni zębatych w układach napędowych przenośników taśmowych z zastosowaniem modelowania. Praca doktorska, Politechnika Wroclawska, Wrocław 2002.