

Marek FLIGIEL<sup>1</sup>

## KRYTERIA KSZTAŁTOWANIA NAJWYGODNIEJSZEJ KONSTRUKCJI NOŚNEJ W PODSTAWOWYM STANIE OBCIĄŻENIA ROZCIĄGANIA I ZGINANIA

**Streszczenie.** W artykule rozpatruje się kryteria optymalnego kształtowania najwygodniejszej konstrukcji nośnej dla przypadku prostego rozciągania i zginania. Jako wielkości kryterialne przyjmuje się minimalną wartość potencjalnej energii deformacji i możliwie równą względną objętościową wartość potencjalnej energii deformacji w całej objętości elementu konstrukcyjnego oraz długość działania sił wewnętrznych konstrukcji nośnej. Jako kryterium ilościowe długości działania sił wewnętrznych konstrukcji nośnej przyjęto całkę z funkcji bezwzględnych naprężeń określoną dla stałej objętości konstrukcji.

**Słowa kluczowe:** wielkości kryterialne, najwygodniejsza konstrukcja nośna, długość działania sił

## CRITERIA OF THE FORMATION OF THE MOST CONVENIENT LOAD-BEARING STRUCTURE IN THE BASIC LOAD STATE: TENSION AND BENDING

**Summary.** In this study, the criteria of an optimal formation of the most convenient load-bearing structure for the case of simple tension and bending are considered. As the criteria quantities, the following are accepted: the minimum value of the potential energy of deformation and a possibly equal relative volumetric value of the potential energy of deformation in the entire volume of a structural element and the activity duration of the internal forces of the load-bearing structure. The integral of the function of absolute stresses, which is determined for the constant volume of the structure, was accepted as a quantitative criterion of the activity duration of the internal forces of the load-bearing structure.

**Keywords:** criteria quantities, the most convenient load-bearing structure, duration of the activity of forces

### 1. WPROWADZENIE

Jednym z kryteriów określających jakość konstrukcji jest jej materiałochłonność i sztywność. Ma to szczególne znaczenie w konstrukcjach, w których relacja masa–sztywność ma zasadniczy wpływ na wytrzymałość i dynamikę konstrukcji, np. w robototechnice,

---

<sup>1</sup> Department of Mechanical Engineering Koszalin University of Technology, Koszalin, Poland,  
e-mail: marek.fligiel@tu.koszalin.pl

w konstrukcjach latających, w układach drgających itp. Najwygodniejszą konstrukcją nośną jest najbardziej sztywna konstrukcja wykonana z zadanej ilości materiału o określonych własnościach funkcjonalnych oraz przekazująca obciążenia zewnętrzne czynne i bierne po możliwie krótkich wewnętrznych drogach ich płynięcia [1-3]. Pojęcie najwygodniejszej konstrukcji nośnej odnosi się zarówno do pojedynczego elementu konstrukcyjnego, jak i do całej złożonej konstrukcji nośnej.

W pracy rozpatruje się kryteria optymalnego kształtowania najwygodniejszej konstrukcji nośnej dla przypadków obciążeń statycznych w zakresie stosowalności prawa Hooke'a dla rozciągania i zginania. Jako kryterium największej sztywności przyjęto minimalną wartość potencjalnej energii deformacji i możliwie równą względną objętościową wartość potencjalnej energii deformacji w całej objętości elementu konstrukcyjnego [4]. Następnym kryterium jest długość działania sił wewnętrznych konstrukcji nośnej. Długość działania sił wewnętrznych konstrukcji nośnej  $Q$  jest rozumiana jako płynięcie sił wewnętrznych po możliwie krótkich wewnętrznych drogach. Jako kryterium ilościowe długości działania sił wewnętrznych konstrukcji nośnej przyjmujemy całkę z funkcji bezwzględnych naprężeń  $p$ , określoną dla objętości  $V_0 = \text{const}$  całej konstrukcji [2]:

$$Q = \int_{V_0} |p| dV = \min \quad (1)$$

Jeżeli stan naprężeń wewnętrznych jest stanem złożonym, to całka (1) przyjmie postać:

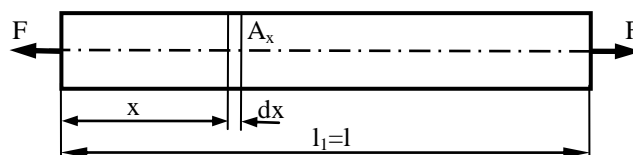
$$Q = \int_{V_0} \sigma_{red} dV = \min \quad (2)$$

gdzie:  $\sigma_{red}$  jest naprężeniem zredukowanym wyznaczonym na podstawie jednej z hipotez wyciężeniowych.

## 2. NAJWYGODNIEJSZA KONSTRUKCJA PRZY ROZCIĄGANIU LUB ŚCISKANIU

### 2.1. Pręt o stałym przekroju poprzecznym

Rozpatrzmy jednowymiarowy element konstrukcyjny pokazany na rysunku 1, jakim jest pręt o długości  $l_1 = l = \text{const}$ , polu przekroju  $A_x = A_1 = \text{const}$ , objętości  $V_{01} = A_1 \cdot l_1 = \text{const}$ , rozciągany statyczną siłą  $F = \text{const}$ .



$$Q_1 = Fl = \text{const}$$

$$U_1 = \frac{F^2 l}{2EA}$$

$$u_1 = \frac{F^2}{2EA^2}$$

Rys. 1. Długość działania sił wewnętrznych  $Q_1$ , całkowita energia odkształcenia sprężystego  $U_1$ , energia względna w jednostce objętości  $u_1$

Fig. 1. Duration of the activity of internal forces  $Q_1$ , total energy of elastic deformation  $U_1$ , relative energy in volume unit  $u_1$

Długość działania sił wewnętrznych  $Q_1$  dla siły  $N_x=F$  jest określona na podstawie całki (1):

$$Q_1 = \int_{V_0} \sigma_x dV = \int_0^l \left| \frac{N_x}{A_1} \right| A_1 dx \quad (3)$$

skąd po scałkowaniu otrzymamy:

$$Q_1 = Fl \quad (4)$$

Całkowita energia odkształcenia sprężystego  $U_1$  i względna  $u_1$  w jednostce objętości pręta odpowiednio wynosi:

$$U_1 = \frac{F^2 l}{2EA_1}, \quad u_1 = \frac{F^2}{2EA_1^2}. \quad (5)$$

Załóżmy, że pręt jest wykonany z materiału o module Younga  $E$  i jest rozciągany siłą  $F=10$  [kN] oraz ma przekrój prostokątny o wymiarach: szerokość  $b_1=0,06$  [m], wysokość  $h_1=0,12$  [m], długość  $l_1=1,2$  [m].

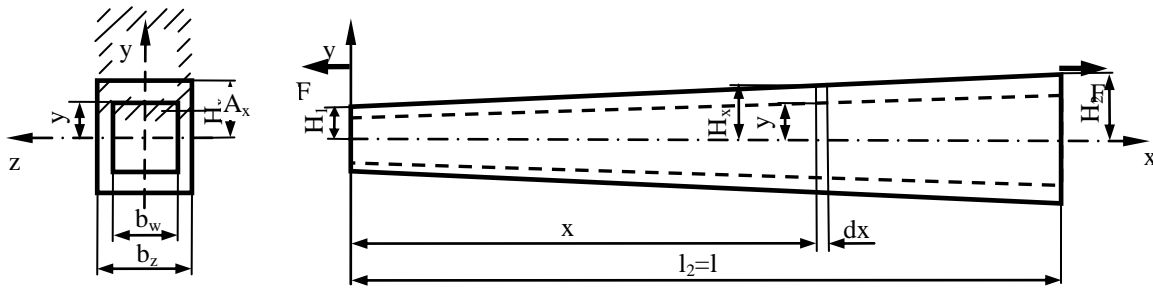
Dla powyższych danych mamy:

- objętość:  $V_{01}=8,64 \cdot 10^{-3}$  [m<sup>3</sup>],
- długość działania sił:  $Q_1=12\ 000$  [Nm],
- całkowitą energię odkształcenia sprężystego:  $U_1=8,3 \cdot 10^3/E$  [MJ],
- energię względną w jednostce objętości:  $u_1=964,5 \cdot 10^3/E$  [MJ/m<sup>3</sup>],
- wydłużenie sprężyste:  $\Delta l_1=1,6 \cdot 10^6/E$  [m],
- naprężenia normalne:  $\sigma_1=1,39$  [MPa].

Z zależności (4) i (5) wynika, że względna energia  $u_1$  w całej objętości jest równomiernie rozłożona oraz długość działania sił wewnętrznych  $Q_1$  jest funkcją iloczynu siły rozciągającej (ściskającej) i długości pręta. Pręt rozciągany (ściskany) o stałym przekroju poprzecznym jest elementem konstrukcyjnym najbardziej sztywnym o równomiernie rozłożonej względnej objętościowo potencjalnej energii deformacji.

## 2.2. Pręt o zmiennym liniowo przekroju

Rozpatrzmy długość działania sił i energię sprężystą w pręcie o zmiennym liniowym przekroju, pokazanym na rysunku 2. Pręt o długości  $l_2=l=\text{const}$  ma kształt stożka ściętego o przekroju prostokątnym z wybraniem w środku. Prostokąt w dowolnym przekroju  $x$  ma następujące wymiary: zewnętrzną szerokość  $b_z=\text{const}$  i wewnętrzną  $b_w=\text{const}$ , zewnętrzną wysokość  $2H_x(x)$ , a wewnętrzną  $2 \cdot y(x)$ . Poszukiwana jest funkcja zmiany wysokości  $y=y(x)$ , przy której pręt będzie najwygodniejszą konstrukcją, tj. spełniającą kryterium najmniejszej długości działania sił wewnętrznych i największej sztywności. Wymiary lewej podstawy są następujące: zewnętrzne  $b_z \times 2H_1=\text{const}$  i wewnętrzne  $b_w \times 2 \cdot y(0)$ ; prawej: zewnętrzne  $b_z \times 2H_2=\text{const}$  i wewnętrzne  $b_w \times 2 \cdot y(l_2)$ .



Rys. 2. Pręt rozciągany o liniowo zmiennej wysokości przekroju poprzecznego  
Fig. 2. Bar being stretched with a linearly changeable height of the cross section

Infinitymalna objętość pręta jest równa  $dV=A_x \cdot dx$ . Z geometrii przekroju pręta o współrzędnej  $x$  wynika, że pole przekroju poprzecznego jest określone zależnością:

$$A_x = 2 \frac{[(H_2 - H_1)x + H_1]l}{l} [b_z - (b_z - b_w)]l y \quad (6)$$

skąd:

$$dV = 2 \frac{[(H_2 - H_1)x + H_1]l}{l} [b_z - (b_z - b_w)]l y dx \quad (7)$$

Naprężenia normalne w przekroju o współrzędnej  $x$  wynoszą:

$$\sigma_x = \frac{Fl}{2 \{ [(H_2 - H_1)x + H_1]l [b_z - (b_z - b_w)]l y \}} \quad (8)$$

a długość działania sił wewnętrznych jest równa:

$$Q_2 = \int_{V_0} \sigma_x dV = \int_0^l \frac{Fl \{ [(H_2 - H_1)x + H_1]l [b_z - (b_z - b_w)]l y \}}{2l \{ [(H_2 - H_1)x + H_1]l [b_z - (b_z - b_w)]l y \}} dx = Fl \quad (9)$$

Dla danej siły rozciągającej (ściskającej)  $F$  długość działania sił wewnętrznych  $Q_2$  nie zależy od pola przekroju poprzecznego  $A_x$  i funkcji wysokości  $y(x)$ , tj. od wysokości prostokątnego przekroju poprzecznego pręta, zależy natomiast od długości pręta.

W celu uproszczenia przekształceń do dalszej analizy założmy, że pręt jest rozciągany taką samą siłą  $F=10$  [kN], ma taką samą długość  $l_2=l=1,2$  [m] i objętość  $V_0=V_{01}=V_{02}=8,64 \cdot 10^{-3}$  [m<sup>3</sup>] oraz jest wykonany z tego samego materiału co w poprzednim przykładzie. Pozostałe wymiary są następujące: szerokość  $b_z=0,08$  [m],  $b_w=0,04$  [m] wysokość  $H_1=0,08$  [m] i  $H_2=0,16$  [m]. Podstawiając powyższe dane, dostaniemy:

$$\sigma_x = \frac{12000}{0,01536 + 0,0128x - 0,096y} \text{ [Pa]} \quad (10)$$

$$dV = \frac{0,01536 + 0,0128x - 0,096y}{1,2} dx = (0,128 + 0,0106)x - 0,08y dx \quad (11)$$

Potencjalna energia deformacji  $U_2$  i względna  $u_2$  w jednostce objętości zawarta w pręcie jest odpowiednio równa:

$$U_2 = \frac{1}{2E} \int_{V_0} \sigma_x^2 dV = \frac{1}{2E} \int_0^{1,2} \frac{14410^6}{(0,01536 + 0,0128x - 0,096y)} dx \text{ [J]} \quad (12)$$

$$u_2 = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{1}{2E} \frac{14410^6}{(0,01536+0,0128x-0,096y)^2} \text{ [J/m}^3\text{]} \quad (13)$$

Z zależności (12) wynika, że rozkład potencjalnej energii deformacji w objętości jest funkcją wysokości  $y(x)$ . Ponieważ długość działania sił wewnętrznych  $Q_2$  nie zależy od  $y=y(x)$ , więc do znalezienia funkcji  $y=y(x)$  dającej ekstremum energii odkształcenia sprężystego z ograniczeniem równościowym na objętość pręta  $V_0=V_{01}=V_{02}=8,64 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3\text{]}$  wykorzystamy funkcjonal Lagrange'a. Ograniczenie zapiszemy w postaci równościowej, skąd otrzymamy funkcję:

$$\Phi(x) = \int_0^{1,2} (0,0128+0,0106)x - 0,08y dx - V_0 = 0 \quad (14)$$

Zakładając funkcjonal Lagrange'a dla wyznaczenia ekstremum warunkowego potencjalnej energii deformacji z ograniczeniem (14), dostaniemy:

$$L = \frac{1}{2E} \int_0^{1,2} \frac{12010^6}{(0,01536+0,0128x-0,096y)^2} dx + \lambda \int_0^{1,2} (0,0128+0,0106)x - 0,08y dx - V_0 \quad (15)$$

Z ekstremum warunkowego funkcjonu (15) mamy:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0,01536+0,0128x-0,096y-8,6410^{-3} = 0 \quad (16)$$

skąd po przekształceniach otrzymamy funkcję:

$$y = y(x) = 0,07+0,133x \quad (17)$$

Dla powyższych danych i funkcji (17) mamy:

- objętość:  $V_{02}=8,64 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3\text{]}$ ,
- długość działania sił:  $Q_2=12000 \text{ [Nm]}$ ,
- całkowitą energię odkształcenia sprężystego:  $U_2=8,3 \cdot 10^3/E \text{ [MJ]}$ ,
- energię względną w jednostce objętości:  $u_2=964,5 \cdot 10^3 \text{ [MJ/m}^3\text{]}$ ,
- wydłużenie sprężyste:  $\Delta l_2=1,6 \cdot 10^6/E \text{ [m]}$ ,
- naprężenia normalne:  $\sigma_2=1,39 \text{ [MPa]}$ .

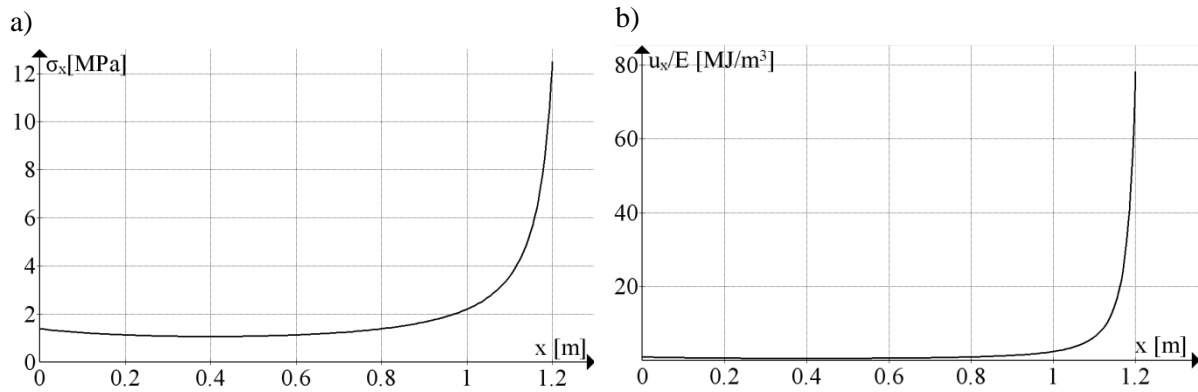
Z powyższych obliczeń wynika, że wartości kryterialne najwygodniejszej konstrukcji dla przekroju prostokątnego liniowo zmiennego są takie same jak dla pręta o stałym przekroju.

### 2.3. Pręt o nieliniowości geometrycznej przekroju

Jako następny przykład przyjmiemy pręt jak na rysunku 2, o zmiennej parabolicznie wysokości  $y=0,07+ax^2$ . Dla objętości pręta  $V_3=V_0=8,64 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3\text{]}$  współczynnik kierunkowy  $a=0,16(6)$ , skąd funkcja  $y=0,07+0,16(6)x^2$ .

Dla danych i funkcji  $y=0,07+0,16(6)x^2$  mamy:

- objętość:  $V_0=8,64 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3\text{]}$ ,
- długość działania sił:  $Q_3=12000 \text{ [Nm]}$ .



Rys. 3. Pręt o nieliniowości geometrycznej: a) zmiana naprężeń wzdłuż pręta, b) zmiana względnej objętościowej potencjalnej energii deformacji wzdłuż pręta

Fig. 3. Bar with geometrical non-linearity: a) change of stresses along the bar, b) change of relative volumetric potential energy of deformation along the bar

Całkowitą energię odkształcenia sprężystego wyznaczamy z zależności:

$$U_3 = \frac{1}{2E} \int_0^{1.2} \sigma_x^2 dV = \frac{1}{2E} \int_0^{1.2} \frac{12000}{(8,64 \cdot 10^{-3} + 0,0128x - 0,016x^2)^2} dx \text{ [J]} \quad (18)$$

Po podstawieniu danych do (18) i scałkowaniu całkowita energia odkształcenia sprężystego wynosi  $U_3 = 1,7 \cdot 10^6 / E$  [MJ] i jest większa od energii prętów rozpatrywanych w rozdziałach 2.1 i 2.2.

Naprężenia  $\sigma_x$  i jednostkowa potencjalna energia deformacji  $u_x$  są określone zależnościami:

$$\sigma_x = \frac{12000}{8,64 \cdot 10^{-3} + 0,0128x - 0,016x^2} \text{ [Pa]} \quad (19)$$

$$u_x = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{1}{2E} \frac{14410^6}{(8,64 \cdot 10^{-3} + 0,0128x - 0,016x^2)^2} \text{ [J/m}^3\text{]} \quad (20)$$

Na wykresach rysunku 3a i 3b pokazano zmianę naprężeń  $\sigma_x(x)$  wzdłuż pręta i względnej objętościowej potencjalnej energii deformacji  $u_x(x)$ . Rozkład względnej objętościowej potencjalnej energii deformacji w pręcie o nieliniowym przekroju poprzecznym nie jest stały, zmienia się wzdłuż długości pręta. Pręt nie spełnia kryterium równej względnej potencjalnej energii deformacji w objętości, a więc nie spełnia jednego z kryteriów najwygodniejszej konstrukcji nośnej.

Wydłużenie bezwzględne wynosi:

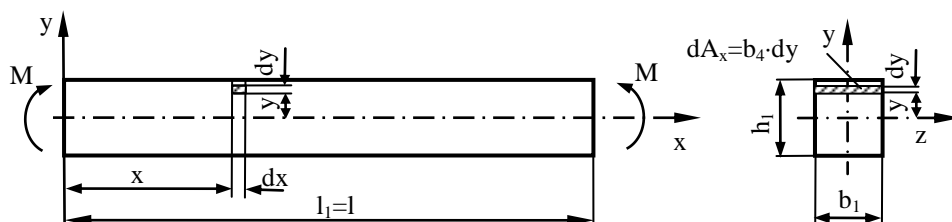
$$\Delta l_3 = \frac{1}{E} \int_0^{1.2} \frac{12000}{8,64 \cdot 10^{-3} + 0,0128x - 0,016x^2} dx \text{ [Pa]} \quad (21)$$

Po podstawieniu danych i scałkowaniu otrzymamy  $\Delta l_3 = 4,17 \cdot 10^6 / E$  [m]. Wydłużenie całkowite również jest większe od wydłużenia prętów rozpatrywanych w rozdziałach 2.1 i 2.2.

### 3. NAJWYGODNIEJSZA KONSTRUKCJA PRZY ZGINANIU

#### 3.1. Belka o niezmiennym przekroju prostokątnym zginana stałym momentem

Rozpatrzmy element konstrukcyjny pokazany na rysunku 4, jakim jest belka o przekroju prostokątnym, długości  $l_1=l=\text{const}$ , polu przekroju  $A_x=A_1=b_1 \cdot h_1$ , objętości  $V_0=V_{01}=A_1 \cdot l_1=b_1 \cdot h_1 \cdot l=\text{const}$ , zginana stałym momentem  $M=\text{const}$ .



Rys. 4. Belka o niezmiennym prostokątnym przekroju zginana stałym momentem

Fig. 4. Beam with an invariable rectangular cross section of bending with constant moment

Dla przekroju prostokątnego i momentu gnącego  $M_g=M$  pokazanego na rysunku 4 długość działania sił wewnętrznych  $Q_1$  jest określona na podstawie całki (1):

$$Q_1 = \int_{V_0} \sigma_x dV = 2 \int_V \left| \frac{M_g y}{J_z} \right| dV. \quad (22)$$

Dwójka przed znakiem całki wynika ze znaków naprężeń, górne linie sił są ściskane, dolne rozciągane. Całka (22) dla takiego rozkładu naprężeń i symetrii przekroju względem głównych centralnych osi bezwładności jest równa zero, stąd obliczenia po wartości bezwzględnej dla jednej strony ściskanego lub rozciąganego przekroju.

Dla górnej i dolnej warstwy linii sił nieskończenie mała objętość pręta jest równa  $dV=dA_x \cdot dx=b_1 \cdot dy \cdot dx$ , a moment bezwładności przekroju  $J_z=b_1 \cdot h_1^3/12$ , stąd:

$$Q_1 = \frac{24M}{h_1^3} \int_0^{h_1/2} dy \int_0^{l_1} dx \quad (23)$$

$$Q_1 = \frac{3M l_1}{h_1} = \frac{3M b_1 l}{V_0} \quad (24)$$

Na podstawie (24) możemy stwierdzić, że długość działania sił wewnętrznych  $Q_1$  dla momentu gnącego  $M_g=M=\text{const}$  zależy od wysokości  $h_1$  przekroju prostokątnego i długości belki  $l$  lub, przy spełnieniu warunku  $V_1=V_0=b_1 \cdot h_1 \cdot l=\text{const}$ , od szerokości  $b_1$  i długości belki  $l$ .

Względna objętościowa energia odkształcenia sprężystego jest równa:

$$u_1 = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{77M^2 y^2}{Eb_1^2 h_1^6} = \frac{77M^2 l^2 y^2}{EV_0^2 h_1^4} \quad (25)$$

Na wartość energii  $u_1$  w największym stopniu wpływa wysokość przekroju. Akumulacja jednostkowej objętościowej energii wzdłuż wysokości jest funkcją hiperboliczną. Również dla stałej objętości  $V_0$  i dla  $y=\text{const}$  akumulacja jednostkowej energii najbardziej się zmienia wraz ze zmianą wysokości przekroju.

Całkowitą energię odkształcenia sprężystego wyznaczamy z zależności:

$$U_1 = \frac{1}{2EJ_z} \int_0^l M_s^2 dx = \frac{6M^2 l}{Eb_1 h_1^3} = \frac{6M^2 l^2}{EV_0 h_1^2} \quad (26)$$

Wartość energii  $U_1$  zmienia się hiperbolicznie wraz ze wzrostem wysokości przekroju.

Średnia wartość względnej objętościowej potencjalnej energii deformacji jest równa:

$$U_{sr} = \frac{6M^2 l^2}{EV_0^2 h_1^2} \quad (27)$$

i zmienia się również według hiperboli drugiego stopnia.

Zależność, dla  $V_0 = \text{const}$ , między całkowitą potencjalną energią deformacji  $U_1$  i długością działania sił  $Q_1$  jest następująca:

$$U_1 = \frac{2Ml^2}{Eh_1} \frac{Q_1}{V_0} \quad (28)$$

a pomiędzy  $Q_1$  i  $U_1$ :

$$Q_1 = U_1 V_0 \frac{Eh_1}{2Ml^2}. \quad (29)$$

Z zależności (29) wynika, że wraz ze zwiększaniem się długości  $l$  pręta długość działania sił  $Q_1$  maleje przy pozostałych niezmiennych wielkościach, natomiast zmniejszając wysokość  $h_1$ , również możemy osiągnąć zmniejszenie wartości  $Q_1$ . Dla energii odkształcenia sprężystego  $U_1$ , opisaną zależnością (28), powyższe zmiany powodują wzrost wartości energii. Przy konstruowaniu belki o stałej objętości  $V_0$  bardziej celowe jest jej wydłużenie niż zmniejszanie wysokości, ponieważ przyrosty całkowitej energii odkształcenia sprężystego  $U_1$  i długość działania sił  $Q_1$  będą szybciej się zmieniać, a tym samym taka belka klasyfikowana według kryteriów podanych w rozdziale 1 będzie zawsze wygodniejszą konstrukcją. Zmiana wysokości belki ma odwrotny wpływ na energię  $U_1$ . Powyższe zmiany  $h_1$  i  $l$  prowadzą do przeciwstawnych zmian kryteriów najwygodniejszej konstrukcji.

W celu uproszczenia przekształceń przyjmujemy następujące dane:  $b_1 = 0,08$  [m],  $h_1 = 0,09$  [m],  $l = 1,2$  [m],  $V_0 = 8,64 \cdot 10^{-3}$  [m<sup>3</sup>].

Dla powyższych danych mamy:

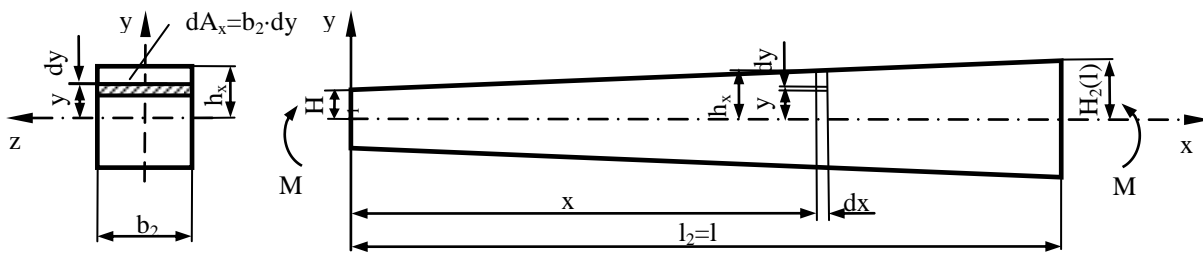
- z zależności (24), długość działania sił wewnętrznych:  $Q_1 = 40 M$  [Nm],
- z zależności (26), potencjalną energią deformacji:  $U_1 = 123,457 \cdot M^2 / E$  [kJ],
- z zależności (25), względną objętościową energią deformacji:  $u_1 = 226,4 \cdot 10^2 \cdot M^2 \cdot y^2 / E$  [MJ/m<sup>3</sup>].

### 3.2. Belka o zmiennym przekroju prostokątnym zginana stałym momentem

W procesie konstruowania w większości przypadków długość belki wynika z własności funkcjonalnych konstrukcji, dlatego jako zmienną można przyjąć wysokość belki lub jej szerokość. Jako zmienną przyjmujemy wysokość belki.

Rozpatrzmy belkę pokazaną na rysunku 5. Belka ma przekrój prostokątny o zmiennej wysokości  $h_x$ , długości  $l_2 = l = \text{const}$ , infinitezymalnym polu przekroju  $dA_x = b_2 \cdot dy$  i objętości  $dV = A_x \cdot dx = b_2 \cdot dy \cdot dx$  oraz całkowitej objętości  $V_0 = \text{const}$ , jest zginana stałym momentem  $M = \text{const}$ .





Rys. 5. Belka o zmiennym przekroju prostokątnym zginana stałym momentem

Fig. 5. Beam with a variable rectangular cross section of bending with constant moment

Dla przekroju prostokątnego o zmiennej wysokości  $h_x$  i momentu gnącego  $M_g = M = \text{const}$  pokazanego na rysunku 5 długość działania sił wewnętrznych  $Q_2$  wyznaczmy z zależności:

$$Q_2 = \int_{V_0} \sigma_x |dV| = 2 \int_{V_0} \frac{M_g y}{J_z} |dV| = \frac{24M}{b_2} \int_{V_0} \frac{y}{2h_x^3} |dV| \quad (30)$$

skąd po wstawieniu infinitesimalnych wielkości otrzymamy:

$$Q_2 = 3M \int_0^l \int_0^{h_x} \frac{y}{h_x^3} dy \quad (31)$$

Dla danego przekroju o współrzędnej  $x$  wysokość  $h_x$  jest stała i równa  $h_x = H_1 + a \cdot x$ . Współczynnik kierunkowy  $a$  funkcji połowy wysokości całkowitego przekroju jest współczynnikiem poszukiwanym, przy którym wartość długości działania sił wewnętrznych  $Q_2$  i potencjalna energia deformacji  $U_2$  przy stałej objętości  $V_0$  będą ekstremalne. Wstawiając  $h_x = H_1 + a \cdot x$  do całki (31), otrzymamy:

$$Q_2 = 3M \int_0^l \int_0^{H_1+ax} \frac{y}{h_x^3} dy \quad (32)$$

Po scałkowaniu i przekształceniach otrzymamy zależność na określenie długości działania sił wewnętrznych:

$$Q_2 = \frac{3M}{2a} \ln \frac{H_1 + al}{H_1} \quad (33)$$

Potencjalną energię deformacji wyznaczmy z całki:

$$U_2 = \frac{M^2}{2E} \int_0^l \frac{1}{J_z(x)} dx = \frac{6M^2}{E} \int_0^l \frac{1}{b_2(2h_x)^3} dx \quad (34)$$

Po podstawieniu  $h_x$  i scałkowaniu wyrażenia (34) dostaniemy zależność:

$$U_2 = \frac{3M^2 a}{8Eb_2} \left[ \frac{1}{H_1} - \frac{1}{(H_1 + al)^2} \right] \quad (35)$$

Względna objętościowa potencjalna energia deformacji jest określona zależnością:

$$u_1 = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{9M^2 y^2}{8Eb_2^2 (H_1 + ax)^6} \quad (36)$$

gdzie naprężenia w dowolnym przekroju są równe  $\sigma_x = \frac{3M y}{2b_2(H_1 + ax)^3}$ .

Objętość jest równa:

$$V_2 = 2b_2 \int_0^l \int_0^{H_1+ax} y \, dy = 2b_2 \left( H_1 l + \frac{al^2}{2} \right) \quad (37)$$

W celu określenia wartości współczynnika  $a$  i uproszczenia przekształceń do dalszej analizy założmy następujące dane: objętość  $V_0 = V_{02} = 8,64 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3\text{]} = \text{const}$ , szerokość  $b_2 = 0,08 \text{ [m]}$ , wysokość  $H_1 = 0,08 \text{ [m]}$  i  $l = 1,2 \text{ [m]}$ . Podstawiając powyższe dane na podstawie (33-37), dostaniemy:

$$Q_2 = \frac{3M}{2a} \ln(1 + 1,5a) \quad (38)$$

$$U_2 = 4,6875 \frac{M^2 a}{E} \left[ 156,25 - \frac{l}{(0,08 + 1,2a)^2} \right] \quad (39)$$

$$u_1 = 175,78 \frac{M^2 y^2}{(0,08 + ax)^6 E} \quad (40)$$

$$V_2 = 0,01536 + 0,72a. \quad (41)$$

Funkcja równościowa ograniczenia na objętość  $V_0 = \text{const}$  jest równa:

$$\Phi(x) = V_2 - V_0 = 6,7210^3 + 0,72a \quad (42)$$

Zestawiając funkcjonal Lagrange'a, otrzymamy:

$$L = \frac{3M}{2a} \ln(1 + 1,5a) + 4,6875 \frac{M^2 a}{E} \left[ 156,25 - \frac{l}{(0,08 + 1,2a)^2} \right] + \lambda(6,7210^3 + 0,72a) \quad (43)$$

i określając ekstremum warunkowe, z zależności  $\frac{\partial L}{\partial a} = 6,7210^3 + 0,72a = 0$  wyznaczmy poszukiwany współczynnik kierunkowy  $a$ , który jest równy  $a = -0,05833$ . Ujemny współczynnik  $a$  oznacza, że belka zwięza się w kierunku dodatniej osi  $x$ .

Na podstawie współczynnika  $a = -0,05833$  odpowiednio wyznaczamy:

- z zależności (38), długość działania sił wewnętrznych:  $Q_2 = 53,47 \text{ M [Nm]}$ ,
- z zależności (39), potencjalną energię deformacji:  $U_2 = 2691,65 \cdot M^2/E \text{ [J]}$ ,
- z zależności (40), względną objętościową energię deformacji  $u_1$  dla:
  - $x=0$ ,  $u_1(0) = 670,5 \cdot M^2 \cdot y^2/E \text{ [MJ/m}^3\text{]}$ ,
  - $x=1,2$ ,  $u_1(1,2) = 175,3 \cdot 10^6 \cdot M^2 \cdot y^2/E \text{ [MJ/m}^3\text{]}$ ;
- z zależności (24), długość działania sił wewnętrznych:  $Q_1 = 40 \text{ M [Nm]}$ ,
- z zależności (26), potencjalną energię deformacji:  $U_1 = 123,457 \cdot M^2/E \text{ [kJ]}$ ,
- z zależności (25), względną objętościową energię deformacji:  $u_1 = 226,4 \cdot 10^2 \cdot M^2 \cdot y^2/E \text{ [MJ/m}^3\text{]}$ .

Z powyższych danych wynika, że przy stałej objętości  $V_0$  belek wartości kryterialne, długość działania sił wewnętrznych  $Q$  i potencjalna energia odkształcenia  $U$  dla przekroju liniowo zmiennego są większe niż dla belki o stałym przekroju. Belki o stałym przekroju zginane stałym momentem są najwygodniejszymi elementami konstrukcyjnymi.

#### 4. WNIOSKI

Na podstawie przeprowadzonych analiz prostego rozciągania i zginania prętów prostych można stwierdzić, że:

1. dla rozciąganego (ściskanego) pręta o dowolnym przekroju prostokątnym wartość kryterialna najmniejszej długości działania sił jest stała,
2. element rozciągany (ściskany) o stałym przekroju spełnia dwa kryteria najwygodniejszej konstrukcji,
3. pręt rozciągany o nieliniowości geometrycznej spełnia kryterium najmniejszej długości działania sił, ale nie spełnia kryterium największej sztywności i nie jest elementem ze względów konstrukcyjnych najwygodniejszym,
4. dla zginania prostego belki o stałym przekroju wartości kryterialne są minimalne, a więc taki element ze względów konstrukcyjnych jest najwygodniejszy,
5. zginane belki o zmiennym liniowo przekroju nie spełniają kryteriów najwygodniejszej konstrukcji nośnej.

#### Bibliografia

1. Fligiel M.: Optymalne kształtowanie struktury elementów konstrukcyjnych typu tarcza. *Acta Mechanica et Automatica*, vol. 3, No. 2, 2009, s. 22-24.
2. Fligiel M.: Formation of the most optimal supporting construction in a two-dimensional state of load. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, vol. 17, No. 3, 2012, University Press, Zielona Góra, Poland, p. 799-810.
3. Bendsøe M.P.: Optimal Material Distribution – Optimal shape design as a material distribution problem – *Struct. Optimization* 1, 1989, p. 193-202.
4. Zalewski W., Kuś S.: Wytrzymałościowe kształtowanie konstrukcji na minimum ciężaru. *Inżynieria i Budownictwo*, nr 9, 1995, s. 479-483.