

Piotr FOLEGA, Grzegorz WOJNAR

## MODELOWANIE SZTYWNOŚCI KOŁA PODATNEGO PRZEKŁADNI FALOWEJ

**Streszczenie.** W artykule omówiono niektóre aspekty modelowania dynamicznego przekładni falowej. W szczególności zaproponowano nowy, oryginalny model dynamiczny przekładni falowej w układzie napędowym. W modelu uwzględniono nieliniowe zmiany sztywności i tłumienia.

## THE MODELLING OF STIFFNESS OF HARMONIC DRIVE FLEXSPLINE

**Summary.** In the paper some aspects of harmonic drive gear modeling of dynamic are consider. At particular of the propose a new original dynamic model of harmonic drive gear in power trans-mission system. In the model we take into consideration a nonlinear stiffness and damping.

### 1. WPROWADZENIE

Przekładnia falowa (rys. 1) składa się z trzech elementów konstrukcyjnych: koła sztywnego o wewnętrznym uzębieniu, koła podatnego z wieńcem zębatym o zewnętrznym uzębieniu, generatora fali, wywołującego odkształcenia koła podatnego.



Rys. 1. Przekładnia falowa [1]

Fig. 1. Harmonic drive [1]

Specyfika pracy tych przekładni polega na tym, że ruch względny współpracujących kół jest wynikiem odkształceń sprężystych koła podatnego. Sprężyste fale koła podatnego są wytwarzane przez generator fali, który obracając się powoduje przemieszczanie fal odkształceń po obwodzie koła. Dzięki temu niekonwencjonalnemu mechanizmowi zazębienia

przekładnie falowe zapewniają dużą wartość przełożenia przy niewielkich gabarytach. Przekładnie falowe mają liczne zalety, ale także wady, w porównaniu z klasycznymi przekładniami zębatymi. Podstawowe zalety to: wysoki moment obrotowy przy małej masie i zwartej budowie, współosiowość wałów czynnego i biernego, płynność pracy oraz duża dokładność kinematyczna. Wadami przekładni falowych są: wysoka elastyczność i wartość przełożenia minimalnego oraz nieliniowa sztywność i tłumienie.

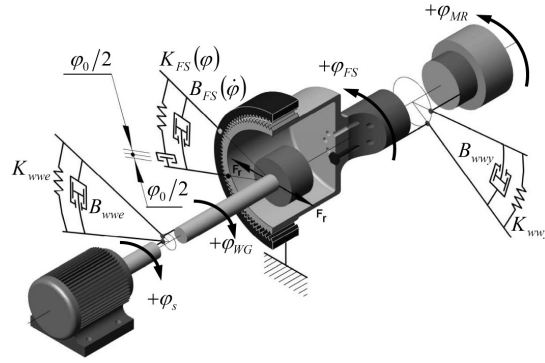
Zastosowanie zębatych przekładni falowych w różnych dziedzinach życia jest coraz szersze. Obecnie znajdują one zastosowanie w przemyśle: motoryzacyjnym, kosmicznym, lotnictwie, medycynie oraz automatyce i robotyce. W przekładniach, wykorzystywanych w układach automatycznej regulacji, dużego znaczenia nabierają zagadnienia dotyczące ich wysokiej dokładności kinematycznej, płynności przekazywania momentu oraz charakterystyki dynamiczne (sztywności, tłumienia, momentów bezwładności, częstości własnych).

Od czasu wynalezienia przekładni falowej w 1955 r. liczni badacze i konstruktorzy poświęcili dużo uwagi badaniom zjawisk dynamicznych w przekładniach falowych. Pierwsze ważne prace, dotyczące tej tematyki zostały opublikowane przez Rosjan [2], [3]. Badania dynamiczne opierające się na licznych eksperymentach doświadczalnych ze swobodnym obciążeniem przekładni wykonali Tuttle i Seering [4], [5]. W swoich pracach opracowali oni różne modele dynamiczne przekładni, różniące się przyjętymi założeniami oraz uproszczeniami. Ich najbardziej kompletny model uwzględniał błąd kinematyczny, nieliniową sztywność i współpracę międzyzębną ze stratami tarcia. W pracy [6] Kircanski i Goldenberg zaproponowali model dynamiczny przekładni falowej, opierający się na badaniu przekładni z blokowanym obciążeniem. W swoich badaniach wykorzystali jednak proste modele tłumienia i tarcia. Wśród prac, które wniosły również istotny wkład w badania dynamiki przekładni falowych należy wymienić publikacje Seyffertha [7], Taghirada [8] oraz Al-Bendera [9]. Prace tych autorów dotyczą przede wszystkim bardzo istotnego problemu prawidłowego zamodelowania nieliniowej sztywności skrętnej i tłumienia koła podatnego przekładni falowej oraz uwzględnienia odpowiednich modeli tarcia w łożyskach i zazębieniu. Na uwagę zasługują również prace dotyczące dynamiki przekładni falowych, opublikowane w Polsce przez W. Ostapskiego [10]. W swoich licznych pracach wykorzystał on dwa modele dynamiczne. Pierwszy dotyczył prostego modelu układu napędowego z reduktorem falowym. Miał on jeden stopień swobody i opisywał drgania skrętne koła podatnego przekładni falowej. Model pozwalał na badanie wpływu: momentów bezwładności, wartości i charakteru rozkładu sił sprężystości i tłumienia oraz luzów i zmian wymuszenia na amplitudę i częstości drgań skrętnych układu napędowego z reduktorem falowym. Drugi model dotyczył dynamiki koła podatnego wyodrębnionego z przekładni, przy założeniu odpowiednich warunków brzegowych i reakcji w strefie zazębienia oraz współpracy z generatorem. W tym przypadku został zastosowany nieliniowy model ciągły, wykorzystujący równania geometrycznie nieliniowej teorii sprężystości powłok cienkościennych.

Analizując wyniki prac własnych [11] oraz innych autorów [2-10] stwierdzono, że zagadnienia modelowania przekładni falowej w układzie napędowym do chwili obecnej nie są całościowo rozwiązane. Dlatego autorzy opracowali propozycję nowego modelu dynamicznego zębatej przekładni falowej, pracującej w układzie napędowym.

## 2. MODEL DYNAMICZNY

Model przedstawiony na rys. 2 uwzględnia pracę silnika asynchronicznego przekładni falowej i maszyny roboczej.



Rys. 2. Model dynamiczny układu napędowego z przekładnią falową  
Fig. 2. Dynamic model of the propulsion system of the harmonic drive

Równania ruchu modelu przyjęły postać:

$$(J_s + w_1 \cdot J_{wwe}) \cdot \ddot{\varphi}_s + B_{wwe} \cdot (\dot{\varphi}_s - \dot{\varphi}_{WG}) + K_{wwe} \cdot (\varphi_s - \varphi_{WG}) = M_n(\dot{\varphi}_s) \quad (1)$$

$$-(J_{WG} + w_2 \cdot J_{wwe}) \cdot \ddot{\varphi}_{WG} + B_{wwe} \cdot (\dot{\varphi}_s - \dot{\varphi}_{WG}) + K_{wwe} \cdot (\varphi_s - \varphi_{WG}) - \frac{B_{FS}}{u} \cdot \left( \frac{\dot{\varphi}_{WG}}{u} - \dot{\varphi}_{FS} \right) - \frac{K_{FS}}{u} \cdot \left( \frac{\varphi_{WG}}{u} - \varphi_{FS} \right) = 0 \quad (2)$$

$$-(J_{FS} + w_3 \cdot J_{wvy}) \cdot \ddot{\varphi}_{FS} + B_{FS} \cdot \left( \frac{\dot{\varphi}_{WG}}{u} - \dot{\varphi}_{FS} \right) + K_{FS} \cdot \left( \frac{\varphi_{WG}}{u} - \varphi_{FS} \right) - B_{wvy} \cdot (\dot{\varphi}_{FS} - \dot{\varphi}_{MR}) - K_{wvy} \cdot (\varphi_{FS} - \varphi_{MR}) = 0 \quad (3)$$

$$-(J_{MR} + w_4 \cdot J_{wvy}) \cdot \ddot{\varphi}_{MR} + B_{wvy} \cdot (\dot{\varphi}_{FS} - \dot{\varphi}_{MR}) + K_{wvy} \cdot (\varphi_{FS} - \varphi_{MR}) = M_{MR}(t) , \quad (4)$$

gdzie:

$J_s$  – moment bezwładności wirnika silnika,

$J_{wwe}$  – moment bezwładności wału wejściowego przekładni i generatora fali,

$J_{wvy}$  – moment bezwładności wału wyjściowego przekładni i koła podatnego,

$J_{WG}$  – moment bezwładności generatora fali,

$J_{FS}$  – moment bezwładności koła podatnego,

$J_{MR}$  – moment bezwładności maszyny roboczej zredukowany do osi generatora fali,

$B_{wwe}$  – współczynnik tłumienia drgań skrętnych wału wejściowego przekładni,

$B_{wvy}$  – współczynnik tłumienia drgań skrętnych wału wyjściowego przekładni,

$B_{FS}$  – współczynnik tłumienia drgań skrętnych koła podatnego przekładni,

$K_{wwe}$  – sztywność skrętą wału wejściowego przekładni,

$K_{wvy}$  – sztywność skrętą wału wyjściowego przekładni,

$K_{FS}$  – sztywność skrętą koła podatnego przekładni,

$M_n(\dot{\varphi}_s)$  – moment napędowy silnika,

$M_{MR}(t)$  – zmienny w czasie moment obciążenia, pochodzący od maszyny roboczej,

$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0,5$  – współczynniki uwzględniające rozkład momentu bezwładności,

$\varphi_s$  – kąt obrotu wirnika silnika,

$\varphi_{WG}$  – kąt obrotu generatora fali,

$\varphi_{FS}$  – kąt obrotu koła podatnego,

$\varphi_{MR}$  – kąt obrotu wału maszyny roboczej,

$u$  – wartość bezwzględna przełożenia przekładni.

### 3. SZTYWNOŚĆ KOŁA PODATNEGO

Sztywność skrętna wałów może zostać wyznaczana np. na podstawie zależności, podanych w [12]. Niektórzy autorzy przyjmują [8], że sztywność wałów jest duża w stosunku do sztywności koła podatnego i wtedy model przyjmuje postać tylko dwóch równań różniczkowych. Sztywności koła podatnego jest nieliniowa i ponadto w przekładniach falowych występuje pewien luz zwrotny. Producent przekładni [1] zaleca wykorzystać liniową aproksymację pomiędzy podanymi w katalogu punktami, opisującymi zmiany sztywności. Inni autorzy [3], [10] wykorzystują do opisu zmian sztywności aproksymację wielomianem trzeciego stopnia. Inne modele sztywności koła podatnego można znaleźć w pracach [4-9]. Jednakże wszyscy ci autorzy spotkali się z problemem prawidłowego zamodelowania zmian sztywności skrętnej przekładni falowej. Na przykład w pracach tych można spotkać następujący uproszczony opis nieliniowych zmian sztywności:

$$K_{FS}(\varphi, \varphi_0) = a + b \cdot \varphi + c \cdot \varphi^2 + d \cdot \varphi^3 \quad \text{dla} \quad |\varphi| > \frac{\varphi_0}{2} \quad (5)$$

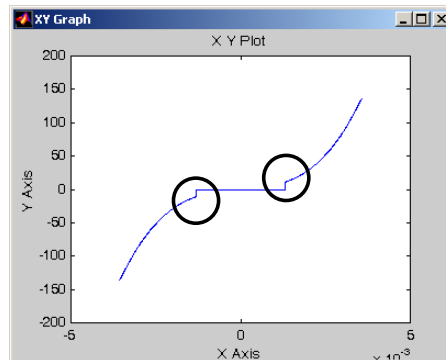
$$\text{lub } K_{FS}(\varphi, \varphi_0) = a + b \cdot \varphi + c \cdot \varphi^2 \cdot \text{sign}(\varphi) + d \cdot \varphi^3 \quad \text{dla} \quad |\varphi| > \frac{\varphi_0}{2} \quad (6)$$

$$\text{i } K_{FS}(\varphi, \varphi_0) = 0 \quad \text{dla} \quad |\varphi| \leq \frac{\varphi_0}{2} \quad (7)$$

Przyjmując wartości parametrów  $a$  i  $c$  równe zero równania 5 i 6 można sprowadzić do postaci:

$$K_{FS}(\varphi, \varphi_0) = b \cdot \varphi + d \cdot \varphi^3 \quad (8)$$

W takim przypadku po przekroczeniu wartości kąta przy luzie zwrotnym wynoszącym  $\varphi_0 = 9$  [min] dla przekładni HDUC 32 sztywność narasta progowo do pewnej wartości (rys. 2), co nie odpowiada prawidłowym zmianą sztywności.



Rys. 3. Zmiany sztywności  
Fig. 3. Changes in the stiffness

Dlatego na podstawie przeprowadzonej analizy danych, zawartych w literaturze autorzy niniejszej pracy zaproponowali następujący opis nieliniowych zmian sztywności:

$$K_{FS}(\varphi, \varphi_0) = a_m + b_m \cdot \varphi + c_m \cdot \varphi^2 + d_m \cdot \varphi^3 \quad \text{dla} \quad -\infty < \varphi < -\frac{\varphi_0}{2} \quad (9)$$

$$K_{FS}(\varphi, \varphi_0) = 0 \quad \text{dla} \quad -\frac{\varphi_0}{2} \leq \varphi \leq \frac{\varphi_0}{2} \quad (10)$$

$$K_{FS}(\varphi, \varphi_0) = a_p + b_p \cdot \varphi + c_p \cdot \varphi^2 + d_p \cdot \varphi^3 \quad \text{dla} \quad \frac{\varphi_0}{2} < \varphi < \infty, \quad (11)$$

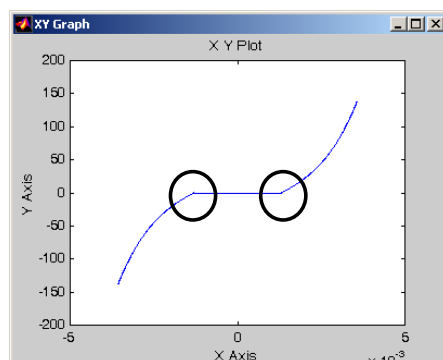
gdzie:

$\varphi_0$  – kątowy luz zwrotny, wynoszący w zależności od producenta i typu przekładni najczęściej: od  $2,9 \cdot 10^{-4} \div 26 \cdot 10^{-4}$  [rad] (  $1 \div 9$  [min]),

$a_m, b_m, c_m, d_m$  – współczynniki wielomianu sztywności, w przypadku gdy:  $-\infty < \varphi < -\frac{\varphi_0}{2}$ ,

$a_p, b_p, c_p, d_p$  – współczynniki wielomianu sztywności, w przypadku gdy:  $\frac{\varphi_0}{2} < \varphi < \infty$ .

Przykładowe zmiany sztywności uzyskane przez autorów (równania od 9 do 11) dla przekładni HDUC 32 ( $\varphi_0 = 9$  min) pokazano na rys. 4.



Rys. 4. Zmiany sztywności  
Fig. 4. Changes in the stiffness

#### 4. PODSUMOWANIE

Zaproponowany model przekładni falowej w układzie napędowym będzie przedmiotem aplikacji w środowisku Matlab–Simulink. Autorzy przewidują, iż wykorzystanie zidentyfikowanego modelu, który uwzględnia nieliniowe zmiany sztywności i tłumienia pozwoli na poszerzenie zakresu wiedzy, związanej z drganiami skrętnymi, występującymi w układach napędowych wyposażonych w reduktory falowe oraz pozwoli na zmniejszenie wydatków na kosztowne badania doświadczalne.

#### Bibliografia

1. Katalog firmy Harmonic Drive AG.
2. Aliev N. A.: A study of the dynamic behavior of flexible gears in harmonic drives. Soviet Engineering Research, 1986, 66(6), p. 7-11.

3. Volkov D. P., Zubkov Y. N.: Vibration in a drive with harmonic gear transmission. Russian Engineering Journal, 1978, 58(5), p. 17-21.
4. Tuttle T. D., Seering W.: A nonlinear model of a harmonic drive gear transmission. IEEE Transaction on Robotics and Automation, 1996, 12(3), p. 368-374.
5. Tuttle T. D., Seering W.: Modeling a harmonic drive gear transmission. Proceeding of IEEE International Conference on Robotics and Automation. 1993, 2, p. 624-629.
6. Kircanski N., Goldenberg A., Jia S.: An experimental study of nonlinear stiffness, hysteresis and friction effects in robot joint with harmonic drives and torque sensors. Proceedings of the third international Symposium on Experimental Robotics, 1993, 1, p. 147-154.
7. Sefferth W., Maghzal A. J., Angeles J.: Nonlinear modeling and parameter identification of harmonic drive robotic transmissions. Proceeding of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1995, 3, p. 3027-3032.
8. Taghirad H. D., Belanger P. R.: An experimental study on modeling and identification of Harmonic drive systems. Proceeding of IEEE Conference on Decision and Control, 1996, 4, p. 4725-4730.
9. Al-Bender F., Symens W., Swevers J., Van Brussel H.: Theoretical Analysis of the Dynamic Behavior of Hysteresis Elements in Mechanical Systems, International Journal of Nonlinear Mechanics, 2004, 39, p. 1721-1735.
10. Ostapski W.: Problemy modelowania przekładni falowych. Materiały Seminarium Przekładnie Mechaniczne Specjalne – modelowanie, rozwój konstrukcji i perspektywy zastosowań, Warszawa, 1996, p. 11-22.
11. Folega P.: Zagadnienia modelowania dynamiki przekładni falowej. ZN Pol. Śl., s. Transport, Gliwice 2006, z. 63, p. 125-132.
12. Dąbrowski Z., Maksymiuk M.: Wały i osie, PWN, Warszawa 1984.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Leszek Blacha